1. Exercice 9 : Trouver tous les polynômes P de $\mathbb{C}[X]$ tels que $XP(X+1) = (X+3)P(X)$

Corrigé : le polynôme nul est solution. Cherchons des polynômes P non nuls.
Soit P une solution non nulle éventuelle.
En faisant successivement $X = 0$, $X = -1$ et $X = -2$ dans la relation on a $P(0) = P(-1) = P(-2) = 0$.
On peut écrire $P(X) = X^r(X+1)^s(X+2)^tR(X)$ avec r, s, t entiers strictement positifs et R polynôme tel que $R(0) \neq 0$, $R(-1) \neq 0$ et $R(-2) \neq 0$.
La relation donne :
$X(X+1)^r(X+2)^s(X+3)^tR(X+1) = (X+3)X^r(X+1)^s(X+2)^tR(X)$.
Notons Z le polynôme défini par cette égalité.

(a) 0 est racine d'ordre r de Z car $R(0) \neq 0$.
Si on avait $R(1) = 0$, on aurait $P(1) = 0$.
Or pour $X \neq 0$, $P(X+1) = \dfrac{X+3}{X}P(X)$. On aurait successivement $P(2) = P(3) = ... = P(n) = ... = 0$. P aurait une infinité de racines et serait le polynôme nul.
Donc $R(1) \neq 0$ et le terme de gauche de l'égalité montre que 0 est racine d'ordre 1 de Z. On a donc $r = 1$.

(b) $R(-1) \neq 0$; l'expression droite de Z montre que -1 est racine d'ordre s de Z. Comme $R(0) \neq 0$, l'expression gauche montre que -1 est racine d'ordre r de Z. $s = r = 1$.

(c) Avec -2 on obtient de même $t = s = 1$.

D'où : $P = X(X+1)(X+2)R(X)$.
La relation qui définit Z donne $R(X+1) = R(X)$.
Le polynôme $R(X) - R(0)$ admet pour racine tous les éléments de $\mathbb{N}$. C'est le polynôme nul et R est un polynôme constant.
Finalement $P = kX(X+1)(X+2)$.
On vérifie facilement que tous les polynômes de ce type sont solution.

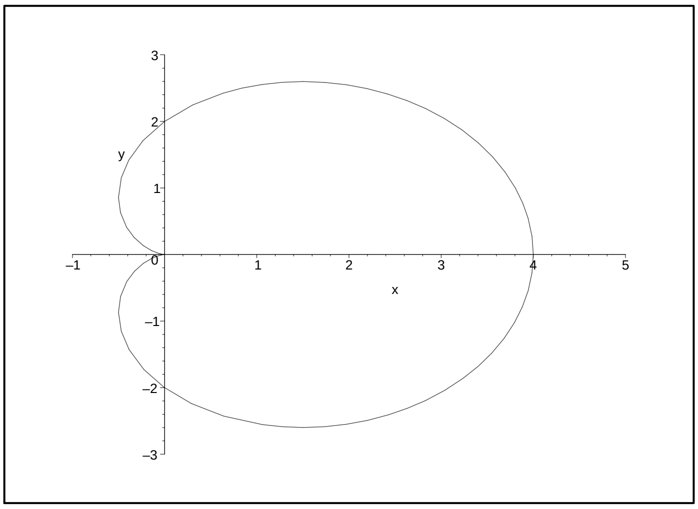
Autre méthode : méthode plus rapide utilisant l'algèbre linéaire.
Cherchons les solutions de degré au plus N, N entier fixé $N \geq 3$.
L'application $\varphi : P \mapsto \varphi(P) = XP(X+1) - (X+3)P(X)$
est un endomorphisme de $\mathbb{R}_N[X]$. Sa matrice dans la base canonique est triangulaire supérieure car $\varphi(X^k)$ est un polynôme de degré au plus k.
$\varphi(X^k) = (k-3)X^k + Q(X)$ avec Q de degré au maximum $k-1$.
Les coefficients diagonaux de cette matrice sont $-3, -2, ..., N-3$.
Le polynôme caractéristique de φ est $\chi_\varphi(\lambda = (-3-\lambda)(-2-\lambda)...(N-3-\lambda)$.
φ possède $N+1$ valeurs propres distinctes, tous les entiers de -3 à $N-3$. φ est donc diagonalisable et tous les espaces propres sont de dimension 1.
0 est valeur propre. Le noyau de φ qui est l'ensemble des polynômes cherchés est donc un sev de dimension 1.
Comme $X(X+1)(X+2)$ est solution, on retrouve tous les polynômes solution.

2. Exercice 98 : Étude et tracé de $\left\{\begin{array}{c} x\,(t) = 2\cos t + \cos\,(2t) + 1 \\ y\,(t) = 2\sin t + \sin\,(2t) \end{array}\right.$.
Déterminer sa longueur.

Corrigé : Soit $f : t \mapsto (x(t), y(t))$. f est 2π-périodique. On fera l'étude sur un intervalle de longueur 2π.
La fonction x est paire, la fonction y est impaire. Le point $f(-t)$ est le symétrique du point $f(t)$ par rapport à l'axe des abscisses.
On étudie la courbe pour $t \in [0, \pi]$ et on complète par symétrie.
$x'(t) = -2\sin t - 2\sin 2t = -4\sin\dfrac{3t}{2}\cos\dfrac{t}{2}$
$y'(t) = 2\cos t + 2\cos 2t = 4\cos\dfrac{3t}{2}\cos\dfrac{t}{2}$
La fonction x' s'annule en $0, 2\pi/3, \pi$. Elle est strictement négative sur $]0, 2\pi/3[$, strictement positive sur $]2\pi/3, \pi[$.
La fonction y' s'annule en $0, \pi/3, \pi$. Elle est strictement positive sur $]0, \pi/3[$, strictement négative sur $]2\pi/3, \pi[$.
Points particuliers :

- $f(0) = (4, 0)$, $x'(0) = 0$, $y'(0) \neq 0$ tangente parallèle à l'axe des ordonnées.
- $f(\pi/3) = (3/2, 3\sqrt{3}/2)$, $x'(\pi/3) \neq 0$, $y'(\pi/3) = 0$ tangente parallèle à l'axe des abscisses.
- $f(\pi/2) = (0, 2)$.
- $f(2\pi/3) = (-1/2, \sqrt{3}/2)$, $x'(2\pi/3) = 0$, $y'(2\pi/3) \neq 0$ tangente parallèle à l'axe des ordonnées.
- $f(\pi) = (0, 0)$; $f'(\pi) = (0, 0)$ point stationnaire. Mais $f"(\pi) = (-2, 0)$. Tangente parallèle à l'axe des abscisses.

D'où le tracé ci-dessous.



On a une représentation paramétrique de la cardioïde. La longueur de la courbe est :
$L = 2\displaystyle\int_0^\pi \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt = 2\int_0^\pi \sqrt{16\cos^2 t/2}dt = 16$

3. Exercice 114 : Soit Σ la surface définie par le paramétrage

$$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (u,v) \mapsto M(u,v) = (u+v, u^2+v^2, u^2-v^2)$$

(a) Déterminer les points doubles de Σ.

(b) Donner une équation cartésienne de Σ.

(c) Déterminer le contour apparent de Σ dans la direction définie par $\overrightarrow{\delta}(0,1,2)$.

Corrigé :

(a) Soit Σ le support de la nappe paramétrée. Un point (X,Y,Z) de Σ est point double s'il existe deux couples distincts de réels (u,v) et (u',v') tels que $M(u,v) = M(u',v') = (X,Y,Z)$.

On résout le système : $\begin{cases} u+v = & u'+v' \\ u^2+v^2 = & u'^2+v'^2 \\ u^2-v^2 = & u'^2-v'^2 \end{cases}$.

Système équivalent à : $u = \pm u' \quad v = \pm v' \quad u+v = u'+v'$.

Les couples distincts sont donnés par :

i. $u' = u$ et $v' = -v$ avec $u+v = u-v$ donc $v = 0 = v'$ et $u = u'$. Pas de point double.

ii. $u' = -u$, $v' = v$ conduit à $u' = 0$; pas de point double.

iii. $u = -u'$, $v = -v'$ avec $u+v = 0$.

Les points doubles sont les points $(0, 2u^2, 0) = M(u,-u) = M(-u,u)$ avec $u \neq 0$

(b) Soit (X,Y,Z) un point de Σ. Il existe deux réels (u,v) tels que ;
$X = u+v \quad Y = u^2+v^2 \quad Z = u^2-v^2 = (u-v)X$

i. Si $X \neq 0$, $X + \dfrac{Z}{X} = 2u \quad X - \dfrac{Z}{X} = 2v$ et $Y = u^2+v^2 = \dfrac{1}{2}\dfrac{Z^2}{X^2} + \dfrac{1}{2}X^2$.
D'où : $X^4 + Z^2 - 2X^2Y = 0$.

ii. Si $X = 0$, $v = -u$ et $Z = 0$. On a encore
$X^4 + Z^2 - 2X^2Y = 0$.

La surface Σ est incluse dans la surface Σ_1 de représentation cartésienne $X^4 + Z^2 - 2X^2Y = 0$.

Réciproquement soit $M = (X,Y,Z)$ un point de Σ_1.

i. Si $X = 0$ alors $Z = 0$.
Si $Y \geq 0$ alors $M = M(u,-u)$ avec $2\mathrm{u}^2 = Y$.
Si $Y < 0$, $M \notin \Sigma$.

ii. Si $X \neq 0$, $M = M(u,v)$ avec $u = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{Z}{X} + X\right) \quad v = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{-Z}{X} + X\right)$

Σ est égale à la surface Σ_1 d'équation cartésienne $X^4 + Z^2 - 2X^2Y = 0$, privée de la demi-droite d'équation $X = Z = 0 \quad Y < 0$.

(c) Les points du contour apparent de Σ sont les points réguliers de la surface pour lesquels le plan tangent contient $\overrightarrow{\delta}$.
Soit $F : (X, Y, Z) \mapsto X^4 + Z^2 - 2X^2Y$. Un vecteur normal à Σ_1 en un point régulier est $\overrightarrow{grad}F(X, Y, Z)$. Les points du contour apparent sont les points où $\overrightarrow{\delta}$ est orthogonal à $\overrightarrow{grad}F$.
On obtient : $\overrightarrow{grad}F(X, Y, Z) = (4X^3 - 2Y, -2X^2, 2Z$.
On obtient pour le contour : $-2X^2 + 4Z = 0$ et $X^4 + Z^2 - 2X^2Y = 0$.
Pour $Z = 0$ le point n'est pas régulier. Le contour apparent a pour équation : $X^2 = 2Z, \quad Y = 5/4Z$.
On a l'intersection d'un plan et d'un cylindre parabolique. C'est une parabole.