-

Exercice n°1 :

1. Deux exemples simples de supplémentaires.

   (a) Soit G le sous-espace vectoriel de E formé des fonctions impaires. La seule fonction paire et impaire étant la fonction nulle, F et G sont en somme directe. Par ailleurs,
   $$\forall x,\ f(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} + \frac{f(x)-f(-x)}{2}$$
   permet d'écrire $f \in E$ comme élément de $F+G$. On a donc $F \oplus G = E$.

   (b) L'équation différentielle proposée est linéaire du second ordre à coefficients constants et homogène. L'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ est un espace-vectoriel de dimension 2 (d'où l'existence de f_1 et f_2). L'équation caractéristique est $r^2+r+1=0$ et admet les complexes $-\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$ comme solutions. Le cours indique (et c'est facile à vérifier) que
   $$f_1 : x \mapsto e^{-x/2}\cos(\sqrt{3}x/2) \quad \text{et} \quad f_2 : x \mapsto e^{-x/2}\sin(\sqrt{3}x/2)$$
   sont deux solutions indépendantes.

   (c) En prenant la valeur en 0 de $f = \alpha_f f_1 + \beta_f f_2$ et de la dérivée, on obtient
   $$\alpha_f = f(0) \quad \text{et} \quad -\frac{\alpha_f}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\beta_f = f'(0)$$
   En résolvant le système, on obtient
   $$\begin{pmatrix}\alpha_f\\ \beta_f\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}f(0)\\ f'(0)\end{pmatrix}$$

   (d) Par définition, G est un sous-espace de E. De plus $f_1, f_2 \in E$ et F est donc aussi un sous-espace de E.
   La matrice A étant inversible, le seul élément de $F \cap G$ est l'application nulle (si $f = \alpha_f f_1 + \beta_f f_2 = 0$ avec $f(0) = f'(0) = 0$ alors $\alpha_f = \beta_f = 0$ et donc $f = 0$). F et G sont donc en somme directe.
   Soit $g \in E$ et $f = \alpha f_1 + \beta f_2$ avec $\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}g(0)\\ g'(0)\end{pmatrix}$. On a alors $f(0) = g(0)$ et $f'(0) = g'(0)$ (toujours par inversibilité de A) et donc $g - f \in G$. Ceci montre que $g \in F+G$ et donc $E \subset F+G$. L'inclusion réciproque est évidente et
   $$F \oplus G = E$$

2. Supplémentaires, stabilité et diagonalisation.

   Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est :
   $$\begin{pmatrix}3 & -4 & 8\\ 5 & -6 & 10\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

(a) On voit que $(1,1,0)$ et $(-2,0,1)$ sont vecteurs propres associés à la valeur propre -1. Avec la trace, la dernière valeur propre est nulle. En résolvant au brouillon, on voit que $(4,5,1)$ est dans le noyau de f. Par dimension (et comme les sous-espaces propres sont en somme directe) on a

$$E_{-1}(f) = Vect((1,1,0),(-2,0,1)) \text{ et } E_0(f) = Vect((4,5,1))$$

f est donc diagonalisable (la somme des dimensions des sous-espaces propres vaut 3).

(b) Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ et $(x',y',z') = f(x,y,z) = (3x-4y+8z, 5x-6y+10z, x-y+z)$. On a

$$x'-y'+z' = -x+y-z$$

Ainsi, si $(x,y,z) \in (P)$ alors $(x',y',z') \in (P)$ et (P) est stable par f.

(c) Un supplémentaire de (P) est une droite. Il suffit donc de trouver un vecteur propre qui n'est pas dans (P) (il engendrera une droite stable supplémentaire de l'hyperplan (P) puisque non incluse dans celui-ci). $Vect((-2,0,1))$ convient.

(d) On a deux implications à prouver.

i. Supposons f diagonalisable et notons $(f_1,\dots,f_n)$ une base de diagonalisation de f. Soit G un sous-espace de E. D'après le théorème de la base incomplète, on peut compléter une base de G par des f_i de façon à obtenir une base de E. Le sous-espace engendré par les f_i utilisés est stable (chaque vecteur de'une base étant propre) et est par construction un supplémentaire de G dans E.

ii. Supposons que tout sous-espace de E ($dim(E) = n$) admette un supplémentaire stable. On construit, par récurrence, une famille libre $(f_1,\dots,f_n)$ de vecteurs propres et ainsi f est diagonalisable.

- Il existe un hyperplan H_1 dans E. H_1 admet un supplémentaire stable qui est une droite $D_1 = Vect(f_1)$ avec f_1 vecteur propre de f.
- Supposons construits $(f_1,\dots,f_k)$ famille libre de vecteurs propres avec $k \leq n-1$. Il existe un hyperplan H de E contenant $Vect(f_1,\dots,f_k)$. Il existe alors une droite $Vect(f_{k+1})$ stable par f. f_{k+1} est vecteur propre et n'est pas dans $Vect(f_1,\dots,f_k)$. Comme $(f_1,\dots,f_k)$ est libre, il en est donc de même de $(f_1,\dots,f_{k+1})$.

Exercice n°2 :

1. $\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\frac{7}{3}} = 1 + \frac{7}{3\sqrt{n}} + \frac{14}{9n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \quad \sqrt{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \sqrt{n}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$

$$u_n = \left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\frac{7}{3}} - \frac{7}{3}\sqrt{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - 1 = \frac{14}{9n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \quad \sum u_n \quad DV$$

2. $\left|\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+5n+3}}\right| \sim \dfrac{1}{n}$. La série n'est pas ACV.
   $\sum \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+5n+3}}$: série alternée qui relève du critère spécial. Elle converge.

3. (a) $v_n = (1+\sqrt{n})^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}\ln(1+\sqrt{n})}$;
   $\ln v_n = \dfrac{1}{n}\left(\ln\sqrt{n} + \ln\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) \sim \dfrac{\ln n}{2n} \longrightarrow 0$; (v_n) converge vers 1.

   (b) $u_n = \dfrac{a^n\,(1+\sqrt{n})^{\frac{1}{n}}}{\sqrt{n}\ln n} \sim \dfrac{a^n}{\sqrt{n}\ln n} = w_n$. $\sum u_n$ et $\sum w_n$ sont de même nature.
   $\dfrac{w_{n+1}}{w_n} = a\sqrt{\dfrac{n}{n+1}} \times \dfrac{\ln n}{\ln(n+1)} \to a$ car $\ln(n+1) = \ln n + \ln(1+\frac{1}{n}) \sim \ln n$.
   Si $a<1$ CV, si $a>1$ DV (règle de d'Alembert).

   (c) $a=1$; $u_n \sim \dfrac{1}{\sqrt{n}\ln n}$; $n^{\frac{3}{4}}u_n \sim \dfrac{n^{\frac{1}{4}}}{\ln n} \to +\infty$. $\dfrac{1}{n^{3/4}} = o(u_n)$. DV.

4. $\sum \dfrac{(-1)^n r^n}{2^n n!} = \sum \left(\dfrac{-r}{2}\right)^n \dfrac{1}{n!}$ série convergente de somme $e^{-r/2}$.
   $\sum \dfrac{\cos n}{n!} = \sum \dfrac{\mathcal{R}e(e^{in})}{n!}$. $\sum \dfrac{e^{in}}{n!} = \sum \dfrac{(e^i)^n}{n!}$ est CV de somme $exp(e^i)$.
   La partie réelle donne : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos n}{n!} = e^{\cos 1}\cos(\sin 1)$

Exercice n°3 :

1. $b>0$. $U_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+b} - \ln n$.

   (a) $U_{n+1} - U_n = \dfrac{1}{n+b+1} - \ln n + 1 + \ln n = \dfrac{1}{n}\left(1+\dfrac{b+1}{n}\right)^{-1} - \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$.
   $U_{n+1} - U_n = \dfrac{-(b+1)}{n^2} + \dfrac{1}{2n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right) \sim -\dfrac{2b-1}{2n^2}$
   La série $\sum(U_{n+1}-U_n)$ est convergente. La suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aussi.

   (b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+b} = \ln n + C(b) + o(1) \qquad \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+b+1} = \ln n + C(b+1) + o(1)$
   Par différence : $\dfrac{1}{n+b+1} - \dfrac{1}{b} = C(b+1) - C(b) + o(1)$.
   Par passage à la limite : $C(b+1) = C(b) - \dfrac{1}{b}$

   (c) $r>0$. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{rk+b} = \frac{1}{r}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+b/r}\right) = \frac{1}{r}\ln n + \frac{1}{r}C\left(\frac{b}{r}\right) + o(1)$

   (d) En séparant les entiers pairs et impairs : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2k+1} + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2(k+1)} = \sum_{p=0}^{2n+1} \frac{1}{p+1}$
   $\dfrac{1}{2}(\ln n + C(1/2) + o(1)) + \dfrac{1}{2}(\ln n + C(1) + o(1)) = \ln(2n+1) + C(1) + o(1)$

$$C(1/2) - C(1) = 2\ln\frac{2n+1}{n} + o(1) \Longrightarrow C\left(\frac{1}{2}\right) = C(1) + 2\ln 2$$

2. $u_n = \dfrac{n+3}{(n+5)(n+1)(2n+1)} \sim \dfrac{1}{2n^2}$. $\sum u_n$ CV.
$$\frac{X+3}{(X+1)(X+5)(2X+1)} = -\frac{1}{2(X+1)} - \frac{1}{18(X+5)} + \frac{10}{9(2X+1)}$$
$$\sum_{k=0}^{n} u_k = -\frac{1}{2}\left(C(1) + \ln n + o(1)\right) - \frac{1}{18}\left(C(5) + \ln n + o(1)\right) + \frac{5}{9}\left(C(1/2) + \ln n + o(1)\right)$$
$$C(5) = C(4) - \frac{1}{4} = C(3)\text{‘}\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = ... = C(1) - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = C(1) - \frac{25}{12}$$
$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \frac{-1}{18} \times \frac{-25}{12} + \frac{5}{9}\left(2\ln 2\right) + o(1) \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+3}{(n+5)(n+1)(2n+1)} = \frac{25}{216} + \frac{10}{9}\ln 2$$

3. $C(1) = \gamma$. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2k+1} = \frac{1}{2}\ln n + \frac{\gamma}{2} + \ln 2 + o(1)$
$$Z_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2}\ln n - \frac{\gamma}{2} - \ln 2. \quad Z_{n+1} - Z_n = \frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2}\left(\ln n + 1 - \ln n\right)$$
$$Z_{n+1} - Z_n = \frac{1}{2n}\left(1 + \frac{3}{2n}\right)^{-1} - \frac{1}{2}\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2n} - \frac{3}{4n^2} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{4n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$
$Z_{n+1} - Z_n \sim \dfrac{-1}{2n^2}$.
Par définition, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un entier N_0 tel que, pour $n \geq N_0$, $\left|Z_{n+1} - Z_n + \dfrac{1}{2n^2}\right| \leq \dfrac{\varepsilon}{2n^2}$. Pour $p > n \geq N_0$:
$$-\sum_{k=n}^{p} \frac{\varepsilon}{2k^2} \leq \sum_{k=n}^{p}\left(Z_{k+1} - Z_k + \frac{1}{2k^2}\right) \leq \sum_{k=n}^{p} \frac{\varepsilon}{2k^2}$$
$$-\sum_{k=n}^{p} \frac{\varepsilon}{2k^2} \leq Z_{p+1} - Z_n + \sum_{k=n}^{p} \frac{1}{2k^2} \leq \sum_{k=n}^{p} \frac{\varepsilon}{2k^2}$$
Comme $\displaystyle\lim_{p\to+\infty} Z_p = 0$ on a, en notant $R_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{2k^2}$, par passage à la limite :
$$-\varepsilon R_n \leq -Z_n + R_n \leq \varepsilon R_n \quad \text{donc, pour} \quad n \geq N_0 \quad |Z_n - R_n| \leq \varepsilon R_n$$
On a donc $Z_n \sim R_n$. Mais $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{(k+1)^2} \leq \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{dt}{t^2} \leq \frac{1}{k^2}$.
Par sommation de n à p puis passage à la limite on obtient :
$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^2} \leq \int_n^{+\infty} \frac{dt}{t^2} \leq \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \quad \Rightarrow R_n - \frac{1}{2n^2} \leq \frac{1}{2n} \leq R_n$$
D'où $R_n \sim \dfrac{1}{2n}$ et $Z_n \sim \dfrac{1}{2n}$.

Remarque : la méthode précédente peut être utlisée avec tout $\alpha > 1$.
Supposons que $u_n \sim \dfrac{1}{n^\alpha}$. La série $\sum u_n$ est convergente.
Par définition de l'équivalence :
$\forall \varepsilon > 0$, $\exists N_0 \in \mathbb{N}$ tel que, $n \geq N_0 \Rightarrow \quad \dfrac{-\varepsilon}{n^\alpha} \leq u_n - \dfrac{1}{n^\alpha} \leq \dfrac{\varepsilon}{n^\alpha}$.
On note $R_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$. Par sommation des inégalités pour $p \geq k \geq n \geq N_0$, puis en faisant tendre p vers l'infini on a : $-\varepsilon R_n \leq \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} u_k - R_n \leq \varepsilon R_n$.
On a encore : $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} u_k \sim R_n$. De plus, comme précédemment :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \int_n^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \quad \Rightarrow R_n - \frac{1}{n^\alpha} \leq \frac{1}{\alpha-1} \times \frac{1}{n^{\alpha-1}} \leq R_n$$

$R_n \sim \dfrac{1}{\alpha-1} \times \dfrac{1}{n^{\alpha-1}}$.

Amélioration de la précision .
On vient de démontrer que $U_n = C(1/2) + \dfrac{1}{2}\ln n + \dfrac{1}{2n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.
On note $W_n = U_n - C(1/2) - \dfrac{1}{2}\ln n - \dfrac{1}{2n}$. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} W_n = 0$

$$W_{n+1} - W_n = \frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2}\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n}$$

$$W_{n+1} - W_n = \frac{1}{2n}\left(1 + \frac{3}{2n}\right)^{-1} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) - \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n}$$

$$W_{n+1} - W_n = -\frac{3}{4n^2} + \frac{9}{8n^3} + \frac{1}{4n^2} - \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) - \frac{1}{2n}\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1} - 1\right)$$

$$W_{n+1} - W_n = \frac{9}{8n^3} - \frac{1}{6n^3} - \frac{1}{2n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) = \frac{11}{24n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

$$-W_n = \sum_{k=n}^{+\infty}(W_{k+1} - W_k) \sim \frac{11}{24} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{n^2} = \frac{11}{48n^2}.$$

D'où : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2k+1} = \frac{1}{2}\ln n + \frac{\gamma}{2} + \ln 2 + \frac{1}{2n} - \frac{11}{48n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

Exercice n°4 : *Racines itérées*

$a_n \geq 0$. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\quad u_n = \sqrt{a_0 + \sqrt{a_1 + ... + \sqrt{a_n}}}$

1. Si $a_n = a > 0$.
   (a) $u_{n+1} = \sqrt{a + u_n}$. $u_0 = \sqrt{a}$.
   (b) La fonction $f : x \mapsto \sqrt{x+a}$ est continue, strictement croissante sur $[-a, +\infty[$.
   $f(x) = x \Leftrightarrow \sqrt{x+a} = x, x \geq -a \Leftrightarrow x + a = x^2, x \geq 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1 + \sqrt{1+4a}}{2}$

(c) Soit c l'unique point fixe de f. On remarque que, pour $n \geq 1$, $u_n \geq 0$.
La fonction $g : x \mapsto f(x) - x$ est de signe constant sur les intervalles $[-a, c]$ et $[c, +\infty[$. $g(0) > 0$ et $\lim_{+\infty} g(x) = -\infty$ donne le signe de g.
De plus les intervalles $[-a, c]$ et $[c, +\infty[$ sont stables par f. D'où l'étude :

- Si $u_0 \in [-a, c]$, pour tout n, $u_n \in [-a, c]$.
Donc , pour tout n, $g(u_n) = u_{n+1} - u_n \geq 0$. La suite est croissante, majorée par c, donc convergente. Sa limite l vérifie $f(l) = l$ par continuité de f. Donc $l = c$.
- Si $u_0 \in [c, +\infty[$, pour tout n, $u_n \in [c, +\infty[$.
Donc , pour tout n, $g(u_n) = u_{n+1} - u_n \leq 0$. La suite est décroissante, minorée par c, donc convergente. Sa limite l vérifie $f(l) = l$ par continuité de f. Donc $l = c$.

2. Soit $r > 0$. On prend ici, pour tout n, $a_n = r^{2^{(n+1)}}$.
$u_0 = \sqrt{r^2} = r$, $u_1 0 = \sqrt{r^2 + \sqrt{r^4}} = \sqrt{r^2 + r^2\sqrt{1}} = r\sqrt{1 + \sqrt{1}}$.
On montre par récurrence que : $u_n = r\sqrt{1 + \sqrt{1 + ... + \sqrt{1}}}$.
D'après la question 1, la suite est convergente de limite $r\dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$.
3. Par utilisation succesiive de la croisance de la fonction $X \mapsto \sqrt{X}$ on a :
$$a_n \leq a_n + \sqrt{a_{n+1}} \Rightarrow \sqrt{a_{n-1} + \sqrt{a_n}} \leq \sqrt{a_{n-1} + \sqrt{a_n + \sqrt{a_{n+1}}}}$$
$$... \Rightarrow \sqrt{a_0 + \sqrt{a_1 + ... + \sqrt{a_n}}} \leq \sqrt{a_0 + \sqrt{a_1 + ... + \sqrt{a_n + \sqrt{a_{n+1}}}}}$$
La suite (u_n) est croissante.
4. On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq \sqrt{0 + \sqrt{0 + ... + \sqrt{a_n}}} = a_n^{\frac{1}{2^{(n+1)}}}$.
Si la suite (u_n) converge, elle est bornée et la minoration précédente montre que la suite $(a_n^{\frac{1}{2^{(n+1)}}})_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
Réciproquement :
$(a_n^{\frac{1}{2^{(n+1)}}})_{n\in\mathbb{N}}$ bornée $\Longleftrightarrow \exists r > 0$ tel que $\forall n$, $0 \leq a_n^{\frac{1}{2^{(n+1)}}} \leq r$
$(a_n^{\frac{1}{2^{(n+1)}}})_{n\in\mathbb{N}}$ bornée $\Longleftrightarrow \exists r > 0$ tel que $\forall n$, $0 \leq a_n \leq r^{2^{(n+1)}}$
On obtient alors facilement : $u_n \leq r\sqrt{1 + \sqrt{1 + ... + \sqrt{1}}} \leq r\dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$.
La suite est (u_n) est croissante et majorée, elle converge.
Remarque : $a_n \leq r^{2^{(n+1)}} \Leftrightarrow a_n \leq r'^{2^n}$ avec $r' = r^2$. donc
$(a_n^{\frac{1}{2^{(n+1)}}})_{n\in\mathbb{N}}$ bornée équivaut à $(a_n^{\frac{1}{2^n}})_{n\in\mathbb{N}}$ bornée.
5. $v_n = \sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 3\sqrt{1 + ... + (n-1)\sqrt{1 + n}}}}$

(a) $v_n = \sqrt{1+\sqrt{4+12\sqrt{1+...+(n-1)\sqrt{1+n}}}}$

$v_n = \sqrt{1+\sqrt{4+\sqrt{144+...+(n-1)\sqrt{1+n}}}}$

$v_n = \sqrt{1+\sqrt{2^2+\sqrt{2^4\times 3^2+...+\sqrt{2^{2^n}\times 3^{2^{n-1}}\times ...\times (n-1)^2(1+n)}}}}$

(b) La suite (a_n) associée vérifie $a_n = (n+1)^2\times n^4\times (n-1)^8 ... \times 2^{2^n}$ ou encore $\dfrac{\ln a_n}{2^n} = \displaystyle\sum_{k=2}^{n+1}\frac{\ln k}{2^{k-2}}$.

La série $\displaystyle\sum \frac{\ln n}{2^n}$ est convergente (utiliser la règle de d'Alemnbert). La suite $\left(\dfrac{\ln a_n}{2^n}\right)$ est convergente, donc bornée.

$\ln a_n \leq M2^n \Rightarrow a_n \leq e^{M2^n} \Rightarrow (a_n)^{1/2^n} \leq e^M$.

D'après les question précédentes la suite (u_n) converge.

(c) $|3-v_n| = \dfrac{|3-v_n|\times|3+v_n|}{|3+v_n|} = \dfrac{|9-v_n^2|}{3+\sqrt{1+\sqrt{.....}}} \leq \dfrac{1}{4}|9-v_n^2|$

$|9-v_n^2| = |(3-v_n)(3+v_n)| = 8-2\sqrt{1+3\sqrt{1+...+(n-1)\sqrt{1+n}}}$

$|9-v_n^2| = 2\left(4-\sqrt{1+3\sqrt{1+...+(n-1)\sqrt{1+n}}}\right)$

$|9-v_n^2| \leq 2\dfrac{\left(15-3\sqrt{1+...+(n-1)\sqrt{1+n}}\right)}{4+\sqrt{1+3\sqrt{1+...+(n-1)\sqrt{1+n}}}}$

$|9-v_n^2| \leq 2\times\dfrac{3}{5}\left(5-\sqrt{1+...+(n-1)\sqrt{1+n}}\right)$

En réitérant le procédé on obtient :

$|3-v_n| \leq \dfrac{2}{4}\times\dfrac{3}{5}\times ...\times\dfrac{n-1}{n+1}\left(n+1-\sqrt{1+n}\right) \leq \dfrac{6}{n}$

La suite (v_n) converge vers 3.