<u>Exercice 1</u> Intégrale de Wallis et formule de Stirling

1. La fonction $t \mapsto \sin^n(t)$ est continue, positive sur $[0, \pi/2]$. Son intégrale sur ce segment est positive. Si elle était nulle, la fonction serait nulle sur le segment, ce qui n'est pas. Donc $\forall n \in \mathbb{N}, I_n > 0$.

   (*Rappel* : **Si** f **continue**, **positive** de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}^+$ vérifie $\displaystyle\int_a^b f(u)du = 0$ **alors** , $\forall t \in [a,b],\ f(t) = 0$)

   $\forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+1} - I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n(t)(\sin t - 1)dt$. La fonction à intégrer est clairement négative sur $[0, \pi/2]$. Son intégrale également et donc $\forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+1} \leq I_n$.

   La suite est décroissante. $I_0 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} 1dt = \frac{\pi}{2}$. et $I_1 = [-\cos t]_0^{\pi/2} = 1$.

2. Pour n entier ; $n \geq 2$:

   $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^{n-1}(t)\cos(t)dt = \left[\cos^{n-1}(t)\sin(t)\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} (n-1)\cos^{n-2}(t)(-\sin t)\sin t(t)dt$

   $I_n = 0 + (n-1)\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^{n-2}(t)(1 - \cos^2 t)dt = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n$.

   En remplaçant on obtient : $\forall \in \mathbb{N},\ n \geq 2,\ I_n = \dfrac{n-1}{n} I_{n-2}$

3. Montrons par récurrence sur n que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $I_n I_{n-1} = \dfrac{\pi}{2n}$ $(\mathcal{P}_n)$.

   La propriété est vraie pour $n = 0$ car $I_0 I_1 = \dfrac{\pi}{2} \times 1 = \dfrac{\pi}{2 \times 1}$.

   Supposons $(\mathcal{P}_n)$ vraie pour un entier n donné. Par propriété montrée en question 2), pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $I_{n+1} = \dfrac{n}{n+1} I_{n-1}$

   On a donc $I_{n+1} I_n = \dfrac{n}{n+1} I_{n-1} I_n = \dfrac{n}{n+1} \times \dfrac{\pi}{2n}$ par hypothèse de récurrence.

   $I_{n+1} I_n = \dfrac{\pi}{2(n+1)}$. $(\mathcal{P}_{n+1})$ est vraie .

   La propriété est donc vraie pour tout entier n.

4. Comme la suite est décroissante, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $I_{n+1} \leq I_n \leq I_{n-1}$

   En utilisant la relation de 2) pour I_{n-1} on a : $\dfrac{n}{n+1} I_{n-1} \leq I_n \leq I_{n-1}$.

   En multipliant par $I_n > 0$: $\dfrac{n}{n+1} I_n I_{n-1} \leq I_n^2 \leq I_n I_{n-1}$

   En utilisant la relation de 3) : $\dfrac{\pi}{2(n+1)} \leq I_n^2 \leq \dfrac{\pi}{2n}$.

   Comme $I_n > 0$, $\sqrt{\dfrac{n}{n+1}} \leq \dfrac{I_n \sqrt{2}n}{\sqrt{\pi}} \leq 1$. Par encadrement, $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{I_n \sqrt{2n}}{\sqrt{\pi}} = 1$.

   On a donc $I_n \sim \dfrac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2n}}$.

5. En utilisant la relation vue en 2), pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\dfrac{I_{2k+2}}{I_{2k}} = \dfrac{2k+1}{2k+2}$.

$$\prod_{k=0}^{p-1} \frac{I_{2k+2}}{I_{2k}} = \frac{I_{2p}}{I_0} = \prod_{k=0}^{p-1} \frac{2k+1}{2k+2} = \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2p-1)}{2 \times 4 \times \cdots \times (2p)} = \frac{(2p)!}{(2 \times 4 \times \cdots \times (2p))^2}$$

$$I_{2p} = \frac{(2p)!}{(2^p \times p!)^2} I_0 = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\frac{\pi}{2}$$

Pour tout p, en utilisant la relation de la question 3), $I_{2p+1}I_{2p} = \dfrac{\pi}{2(2p+1)}$

On connaît I_{2p} d'où : $I_{2p+1} = \dfrac{\pi}{2(2p+1)}\dfrac{2^{2p}(p!)^2}{(2p)!}\dfrac{2}{\pi}$. $I_{2p+1} = \dfrac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}$.

6. On sait qu'il existe un réel strictement positif K tel que $n! \sim K\, n^n e^{-n}\sqrt{n}$.

   On a donc $I_{2p} \sim \dfrac{(2p)^{2p}e^{-2p}\sqrt{2p}K}{2^{2p}(p^p e^{-p}\sqrt{p}K)^2}\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi}{K\sqrt{2p}}$. Mais on a vu $I_{2p} \sim \dfrac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2\times 2p}}$.

   $\displaystyle\lim_{p\to+\infty}\frac{I_{2p}}{I_{2p}} = 1 = \lim_{p\to+\infty}\frac{\pi}{K\sqrt{2p}}\frac{2\sqrt{p}}{\sqrt{\pi}} = \frac{\sqrt{2\pi}}{K}$ et $K = \sqrt{2\pi}$.

   On a donc $n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$

<u>Exercice 2</u>

1. La série $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n}{2n+1}$ est une série alternée.

   Notons, pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{1}{2n+1}$, $\lim u_n = 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{2n+3} \leq u_n$. La suite (u_n) est décroissante de limite 0. La série $\sum(-1)^n u_n$ relève du critère spécial des séries alternées. Elle converge.

2. Pour tout entier k, $\displaystyle\frac{(-1)^k}{2k+1} = \int_0^1 (-1)^k t^{2k}dt = \int_0^1 (-t^2)^k dt$.

   $$\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n}\int_0^1 (-t^2)^k dt = \int_0^1\left(\sum_{k=0}^{n}(-t^2)^k\right)dt$$

   Mais $\forall t \in [0,1]$, $-t^2 \neq 1$ donc :

   $$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = \int_0^1 \frac{1-(-t^2)^{n+1}}{1-(-t^2)}dt = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}dt - \int_0^1 \frac{(-t^2)^{n+1}}{1+t^2}dt$$

   Notons pour tout entier n, $\displaystyle K_n = \int_0^1 \frac{(-t^2)^{n+1}}{1+t^2}dt$.

   On a : $\displaystyle |K_n| \leq \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}dt \leq \int_0^1 t^{2n+2}dt = \frac{1}{2n+3}$. On a donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} K_n = 0$.

   Or, pour tout n, $S_n = [\arctan(t)]_0^1 - K_n = \dfrac{\pi}{4} - K_n$

   La suite (S_n) est donc convergente de limite $\pi/4$. Autrement dit la série $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n}{2n+1}$ est convergente de somme $S = \pi/4$.

   $$S = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ R_n = S - S_n = K_n = \int_0^1 \frac{(-t^2)^{n+1}}{1+t^2}dt$$

3. $\displaystyle\sum\left(\frac{\pi}{4} - \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}\right) = \sum R_n = \sum\left(\int_0^1 \frac{(-t^2)^{n+1}}{1+t^2}dt\right)$.

La somme partielle d'ordre n de cette série est :

$$T_n = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n}(-t^2)^{k+1}\right)\frac{dt}{1+t^2} = -\int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n}(-t^2)^{k}\right)\frac{t^2}{1+t^2}dt$$

$$T_n = -\int_0^1 \frac{1-(-t^2)^{n+1}}{1+t^2}\frac{t^2}{1+t^2}dt = -\int_0^1 \frac{t^2dt}{(1+t^2)^2} + K'_n$$

Comme précédemment $|K'_n| \leq \displaystyle\int_0^1 t^{2n+4}dt = \frac{1}{2n+5}$.

On a donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} T_n = -\int_0^1 \frac{t^2}{(1+t^2)^2}dt$. La série est convergente.

De plus : $\displaystyle\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \left[t\frac{1}{1+t^2}\right]_0^1 - \int_0^1 t\times\frac{-2t}{(1+t^2)^2}dt$

On en tire $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^2}{(1+t^2)^2}dt = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} R_n = \frac{1}{4} - \frac{\pi}{8}$.

4. $a > 0$ $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n}{an+1}$ est une série alternée qui relève du critère spécial. Elle converge.

$$S_n(a) = \sum_{k=0}^{n}\int_0^1 (-t^a)^k dt = \int_0^1 \frac{1-(-t^a)^{n+1}}{1+t^a}dt = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^a} - K_n(a)$$

avec $|K_n(a)| \leq \displaystyle\int_0^1 t^{na+a}dt = \frac{1}{(n+1)a+1}$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} K_n(a) = 0$

La suite $S_(a)$ est convergente de limite l'intégrale. Le reste de la série $S(a) - S_n(a)$ est donc $K_n(a)$.

5. $S(a) = \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{1+t^a}dt$.

6. Même technique $R_n(a) = K_n(a) = \displaystyle\int_0^1 \frac{(-t^a)^{n+1}}{1+t^a}dt$.

$$\sum_{k=0}^{n} K_k(a) = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n}(-t^a)^k\right)\frac{-t^a}{1+t^a}dt = \int_0^1 \frac{-t^a}{(1+t^a)^2} + \int_0^1 \frac{(-t^a)^{n+1}}{(1+t^a)^2}t^a dt$$

La valeur absolue de la dernière intégrale est majorée par

$\displaystyle\int_0^1 t^{(n+2)a}dt = \frac{1}{(n+2)a+1}$. Limite 0 et : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} R_n(a) = -\int_0^1 \frac{t^a}{(1+t^a)^2}dt$.

7. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1} = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots = \int_0^1 \frac{dt}{1+t} = \ln 2$. (série harmonique alternée).

$$R_n(1) = \sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k+1} \text{ et } \sum_{n=0}^{+\infty} R_n(1) = -\int_0^1 \frac{t}{(1+t)^2}dt = -\ln 2 + \frac{1}{2}$$

Exercice 3

1. $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ contiennent 0 et ne sont donc pas vides.
   $\forall (p,q) \in \mathbb{Z}^2$, $p + (-q) = p - q \in \mathbb{Z}$. $(\mathbb{Z}, +)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$.

De même si a et b sont deux éléments de $\mathbb{Q}$, il existe p, q, p', q' dans $\mathbb{Z}$ avec $q > 0$, $q' > 0$ tels que $a = p/q$ et $b = p'/q'$. On a : $a + (-b) = a - b = \dfrac{pq' - p'q}{qq'} \in \mathbb{Q}$.
$(\mathbb{Z}, +)$ et $(\mathbb{Q}, +)$ sont des sous-groupes de $(\mathbb{R}, +)$.

2. G est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ et $g \in G$. $0 = g+(-g) \in G$. $-g = 0+(-g) \in G$. $2g = g + (-(-g)) \in G$. Par une récurrence immédiate $\forall n \in \mathbb{N}, ng \in G$.
$((n+1)g = ng + (-(-g)))$
De même $\forall n \in \mathbb{N}$, $-ng = n(-g) \in G$ car $-g \in G$. Donc $\forall p \in \mathbb{Z}, pg \in G$.
3. Soit $a \in \mathbb{R}$. $a\mathbb{Z} = \{xa \,/\, x \in \mathbb{Z}\}$. $a\mathbb{Z}$ est non vide. Il contient a. De plus si x, y sont deux éléments de cet ensemble, il existe deux entiers p, q dans $\mathbb{Z}$ tels que $x = pa$ et $y = qa$. $x + (-y) = (p - q)a \in a\mathbb{Z}$.
$(a\mathbb{Z}, +)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$.
4. Si G est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ et $a \in G$ on a montré en question 2) que $a\mathbb{Z} \subset G$.
5. On considère maintenant un sous-groupe G de $(\mathbb{R}, +)$ non réduit à $\{0\}$. On note G^+ les éléments strictement positifs de G.
   (a) Par hypothèse G possède au moins un élément non nul α. Mais $-\alpha$ est aussi élément de G. Un des deux est strictement positif. G^+ est non vide.
   (b) La borne inférieure d'un ensemble de réels est, s'il existe, le plus grand des minorants de cet ensemble. On a :
   $m = \inf(A) \Leftrightarrow \forall a \in A, m \leq a$ et $\forall m' > m, m'$ ne minore pas A.
   $m = \inf(A) \Leftrightarrow \forall a \in A, m \leq a$ et $\forall m' > m,\ \exists a' \in A \,/\, m \leq a' < m'$.
   Si $A =]0, 1[$, $\inf(A) = 0$ et $0 \notin A$.
   (c) L'ensemble G^+ est non vide, minoré par 0. Il possède donc une borne inférieure.
   (d) Si $G = \pi\mathbb{Z}$, $G^+ = \{n\pi\,,\, n \in \mathbb{N}^*\}$. $\inf G^+ = \pi$.
   (e) Soit $\alpha = \inf \mathbb{Q}^+$. Comme 0 minore $\mathbb{Q}^+$, $0 \leq \alpha$.
   Mais $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $1/n \in \mathbb{Q}^+$ donc $0 \leq \alpha \leq 1/n$. Par suite $\alpha = 0$.
6. On suppose maintenant que G est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ et que $\alpha = \inf G^+$ est un réel strictement positif.
   (a) Comme $\alpha > 0$, $\alpha < 3\alpha/2$. $3\alpha/2$ n'est donc pas un minorant de G^+ et il existe un élément g de G^+ tel que $\alpha \leq g < \dfrac{3\alpha}{2}$.
   Si $\alpha < g$ alors g n'est pas, par définition de la borne inférieure, un minorant de G^+. On peut donc trouver un élément $g' \in G^+$ vérifiant $\alpha \leq g' < g$.
   On a alors $\alpha \leq g' < g < 3\alpha/2$ et $d(g, g') = g - g' < d(3\alpha/2, \alpha/2) = \alpha/2$.
   Mais $g - g' = g + (-g') \in G$ et $g - g' > 0$ donc $g - g' \in G^+$. On devrait avoir $g - g' \geq \alpha$ ce qui n'est pas.
   On a une contradiction et donc $\alpha = g \in G^+$.
   (b) Comme $\alpha \in G$, $\alpha\mathbb{Z} \subset G$.

(c) Soit $x \in G$. Notons $p = \lfloor \frac{x}{\alpha} \rfloor$.
On a $p \leq \frac{x}{\alpha} < p+1$ et donc $p\alpha \leq x < (p+1)\alpha$. $0 \leq x - p\alpha < \alpha$.
La majoration stricte par α montrer que $x - p\alpha \notin G^+$. Mais c'est un élément positif, élément de G par différence de deux éléments de G.
Donc $x - p\alpha = 0$ et $x = p\alpha$.On a donc $G \subset \alpha\mathbb{Z}$.
On a donc, par double inclusion, $G = \alpha\mathbb{Z}$.

7. On suppose maintenant que G est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ non réduit à $\{0\}$ et que $\inf G^+ = 0$.
   (a) Soit n élément quelconque de $\mathbb{N}$. $1/(n+1)$ ne minore pas G^+. Il existe donc un réel $g_n \in G^+$ vérifiant : $0 < g_n < \frac{1}{n+1}$.
   (b) Soit x un réel quelconque.
   On note pour tout n de $\mathbb{N}$, $y_n = \left\lfloor \frac{x}{g_n} \right\rfloor g_n$. C'est un élément de la forme pg, $p \in \mathbb{Z}$ et $g \in G$. C'est donc un élément de G.
   Par définition de la partie entière on a : $\left\lfloor \frac{x}{g_n} \right\rfloor \leq \frac{x}{g_n} < \left\lfloor \frac{x}{g_n} \right\rfloor + 1$.
   En multipliant par $g_n > 0$, $y_n \leq x < y_n + g_n$ et $0 \leq x - y_n < g_n < \frac{1}{n+1}$
   La suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\left\lfloor \frac{x}{g_n} \right\rfloor g_n \right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de G convergente de limite x.
   On vient de démontrer que dans ce deuxième cas que tout réel est limite d'une suite d'éléments de G.
8. Soit r un réel quelconque et $G = \{n + kr/(n,k) \in \mathbb{Z}^2\}$.
   (a) Supposons que r soit élément de $\mathbb{Q}$. On peut écrire $r = \frac{p_0}{q_0}$ avec $p_0 \in \mathbb{Z}$ et $q_0 \in \mathbb{N}^*$, p_0 et q_0 supposés sans diviseur commun autres que ± 1. .
   $G = \left\{ n + k\frac{p_0}{q_0} \ (n,k) \in \mathbb{Z}^2 \right\} = \left\{ \frac{nq_0 + kp_0}{q_0} \ , \ (n,k) \in \mathbb{Z} \right\}$
   Les entiers de la forme $nq_0 + kp_0$ sont exactement les multiples du pgcd de p_0 et q_0. Comme ils sont premiers entre eux $G = \left\{ \frac{N}{q_0} \ , \ N \in \mathbb{Z} \right\}$.
   On a alors de manière évidente $\inf(G^+) = \frac{1}{q_0}$.
   (b) Supposons que $\alpha = \inf G^+$ soit un réel strictement positif. On sait alors que $G = \alpha\mathbb{Z}$.
   $1 = 1 + 0 \times r \in G$ donc il existe un entier q non nul tel que $1 = q\alpha$.
   $r = 0 + 1 \times r \in G$. Donc il existe p entier tel que $r = p\alpha$. On a donc $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$.

   En résumé G est un groupe du type $\alpha\mathbb{Z}$ ssi $r \in \mathbb{Q}$.
   Autrement dit G est un groupe du deuxième type (dense dans $\mathbb{R}$) ssi $r \notin \mathbb{Q}$

Exercice 4 **Séries de Bertrand** $\sum u_n = \sum \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$, $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$. On a une série de réels positifs à partir de $n = 2$.

1. $\alpha > 1$ et on note $\gamma = (1+\alpha)/2$.
   On a immédiatement $1 = \frac{1+1}{2} < \frac{1+\alpha}{2} = \gamma < \frac{\alpha+\alpha}{2} = \alpha$
   $n^\gamma u_n = \frac{1}{n^{-\gamma+\alpha}(\ln n)^\beta} = \frac{(\ln n)^{-\beta}}{n^{\frac{\alpha-1}{2}}} \to 0$ car si $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$, $(\ln n)^b = o(n^a)$.
   Par suite $u_n = o\left(\frac{1}{n^\gamma}\right)$. Comme $\gamma > 1$, $\sum \frac{1}{n^\gamma}$ est convergente et, par domination, $\sum u_n$ est convergente.
2. $\alpha < 1$. On note encore $\gamma = (1+\alpha)/2 < 1$. $n^\gamma u_n = n^{\frac{1-\alpha}{2}}(\ln n)^{-\beta} \to +\infty$ car $1-\alpha > 0$. Donc ici $\frac{1}{n^\gamma} = o(u_n)$. Comme $\gamma < 1$, la divergence de la série minorante entraîne la divergence de $\sum u_n$.
3. On prend $\alpha = 1$. $u_n = \frac{1}{n\ln(n)^\beta}$.
   (a) Remarquons que si $\beta \leq 0$, $\lim nu_n = 1\,\text{ou}\, +\infty$ et donc $\frac{1}{n} = O(u_n)$. La divergence de la série $\sum \frac{1}{n}$ entraîne la divergence de la série $\sum u_n$.
   (b) Si $\beta > 0$, notons $f : x \mapsto \frac{1}{x(\ln x)^\beta}$. f est continue, dérivable sur $[2,+\infty[$ et $\forall x \geq 2$, $f'(x) = -\frac{\ln(x)^\beta + \beta(\ln x)^{\beta-1} \times x \times (1/x)}{x^2(\ln x)^{2\beta}} < 0$
   La fonction f est continue, décroissante sur $[2,+\infty[$. La série $\sum_{n\geq 2} f(n)$ est convergente ssi $x \mapsto \int_2^x f(u)du$ a une limite quand x tend vers $+\infty$.
   Or $\int_2^x f(u)du = \int_2^x \frac{1}{u(\ln u)^\beta}du = \int_2^x (\ln u)^{-\beta} \times \frac{1}{u}du$
   - Si $\beta \neq 1$, $\int_2^x f(u)du = \left[\frac{(\ln u)^{-\beta+1}}{-\beta+1}\right]_2^x = \frac{(\ln x)^{-\beta+1} - (\ln 2)^{-\beta+1}}{1-\beta}$.
     L'intégrale a une limite finie en $+\infty$ ssi $-\beta+1 < 0$ c.a.d. ssi $\beta > 1$.
   - Si $\beta = 1$:
     $\int_2^x f(u)du = \int_2^x \left(\frac{1}{\ln u}\right)\frac{1}{u}du = [\ln(\ln(u))]_2^x = \ln(\ln(x)) - \ln(\ln(2))$
     La limite de l'intégrale est $+\infty$. La série diverge

En résume

$$\sum \frac{1}{n^\alpha(\ln n)^\beta} \text{ est convergente ssi } \alpha > 1 \,\textbf{ou}\, \alpha = 1 \text{ et } \beta > 1$$