1. $\boxed{\begin{array}{l}\text{Déterminer toutes les suites } u \text{ d'éléments de } \mathbb{R} \text{ telles que}\\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+4}=2u_{n+3}+u_{n+2}-2u_{n+1}\end{array}}$

Correction : Soit u une suite d'éléments de $\mathbb{R}$ et $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $\forall n\in\mathbb{N},\ U_n=\begin{pmatrix}u_n\\u_{n+1}\\u_{n+2}\\u_{n+3}\end{pmatrix}$. La suite u est solution ssi

$$(1)\quad \forall n\in\mathbb{N}, U_{n+1}=\begin{pmatrix}u_{n+1}\\u_{n+2}\\u_{n+3}\\u_{n+4}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&-2&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_n\\u_{n+1}\\u_{n+2}\\u_{n+3}\end{pmatrix}=AU_n$$

$$(1)\Leftrightarrow \forall n\in\mathbb{N},, U_n=A^nU_0$$

Étudions la diagonalisation éventuelle de A.

$$\chi_A(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda&-1&0&0\\0&\lambda&-1&0\\0&0&\lambda&-1\\0&2&-1&\lambda-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&-1&0&0\\0&\lambda&-1&0\\0&0&\lambda&-1\\2\lambda-\lambda^2+\lambda^3(\lambda-2)&2&-1&\lambda-2\end{vmatrix}$$

résultat obtenu en remplaçant la colonne C_0 par $C_0+\lambda C_1+\lambda^2C_2+\lambda^3C_3$.

$\chi_A(\lambda)=(-1)^5(2\lambda-\lambda^2+\lambda^3(\lambda-2))(-1)^3=\lambda^4-2\lambda^3-\lambda^2+2\lambda$

$\chi_A(\lambda)=\lambda(\lambda^3-2\lambda^2-\lambda+2)=\lambda(\lambda-2)(\lambda^2-1)=\lambda(\lambda-2)(\lambda-1)(\lambda+1)$

$\mathrm{sp}(A)=\{0,1,-1,2\}$. 4 valeurs propres d'ordre de multiplicité 1, 4 espaces propres de dimension 1. Comme A est une matrice carrée de taille 4, A est diagonalisable. On vérifie facilement qu'une base de vecteurs propres est :

$$K_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\quad K_2=\begin{pmatrix}1\\2\\4\\8\end{pmatrix}\quad K_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\quad K_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}$$

Un vecteur de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ se décompose de manière unique dans cette base. En particulier $U_0=\alpha K_1+\beta K_2+\gamma K_3+\delta K_4$. Si K est un vecteur propre de A associé à la valeur propre α, $\forall n\in\mathbb{N}$, $A^nK=\alpha^nK$.

On obtient $U_n=\alpha\times 0^nK_1+\beta\times 2^nK_2+\gamma\times 1^nK_3+\delta\times(-1)^nK_4$.

La première coordonnée de U_n est u_n. Les suites u solution sont donc les suites $(\alpha 0^n+\beta 2^n+\gamma 1^n+\delta(-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $(\alpha,\beta,\delta,\gamma)\in\mathbb{R}^4$.

Un calcul explicite est possible. En effet soit P la matrice des vecteurs propres dans la base canonique de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.

$$P=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&2&1&-1\\0&4&1&1\\0&8&1&-1\end{pmatrix}\text{ et } D=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}.$$

On a , pour tout n de $\mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$ et par calcul $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & -1 & 1/2 \\ 0 & -1/6 & 0 & 1/6 \\ 0 & 1 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & -1/3 & 1/2 & -1/6 \end{pmatrix}$

On obtient successivement le calcul explicite de A^n, de A^nU_0 et, en prenant la première coordonnée, de u_n :

$u_n = 0^n u_0 + (-1/2\,0^n - 1/6\,2^n + 1 - 1/3\ (-1)^n)\, u_1 + (-0^n + 1/2 + 1/2\ (-1)^n)\, u_2 + (1/2\,0^n + 1/6\,2^n - 1/2 - 1/6\ (-1)^n)\, u_3$.

Et donc pour tout $n \geq 1$:

$u_n = (-1/6\,2^n + 1 - 1/3\ (-1)^n)\, u_1 + (1/2 + 1/2\ (-1)^n)\, u_2 + (1/6\,2^n - 1/2 - 1/6\ (-1)^n)\, u_3$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$. Soit $a \in \mathbb{R}$. On note u l'endomorphisme de E qui à tout polynôme P associe $u(P) = (X-a)P'$. Déterminer les éléments propres de u. Cet endomorphisme est-il diagonalisable ?

Correction :

On remarque déjà que l'application u est linéaire et que $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$ $\deg(u(P)) = \deg(P)$. On a donc bien un endomorphisme.

La matrice de u dans la base canonique de E est $A = \begin{pmatrix} 0 & -a & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -2a & & & \\ & & 2 & -3a & & \\ & & & & & \\ & & & & n-1 & -na \\ 0 & & & & 0 & n \end{pmatrix}$.

A est triangulaire supérieure. $\mathrm{sp}(A) = \{0, 1, \ldots, n\}$. A matrice de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{K})$ possède $n+1$ valeurs propres distinctes. Elle est diagonalisable et tous les espaces propres sont de dimension 1. Il en est de même pour u.

Soit $k \in [[0, n]]$. On remarque que : :

$u\left((X-a)^k\right) = (X-a) \times k(X-a)^{k-1} = k(X-a)^k$

Le polynôme $(X-a)^k$ est vecteur propre de u associé à la valeur propre k.

Comme tous les espaces propres sont de dimension 1 on a :

$\forall k \in [[0, n]],\ E_k(u) = \mathrm{Vect}\left((X-a)^k\right)$.

3. La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ b & c & 2 & 0 \\ 0 & e & f & 2 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

Correction : $\chi_A(\lambda) = (\lambda-1)^2(\lambda-2)^2$ et $\mathrm{sp}(A) = \{1, 2\}$.

Soit $X \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{K})$ de coordonnées $x, y, e = z, t$ dans la base canonique.

$$AX = X \Leftrightarrow \begin{cases} ax & & & & = 0 \\ bx & +cy & +z & & = 0 \\ & ey & +fz & +t & = 0 \end{cases}$$

Si $a \neq 0$, $AX = X \Leftrightarrow \begin{cases} x & & & & = 0 \\ bx & +cy & +z & & = 0 \\ & ey & +fz & +t & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x & = 0 \\ z & = -cy \\ t & = (cf - e)y \end{cases}$

Le système est de rang 3 et l'ensemble des solutions est un espace vectoriel de dimension 1. $\dim E_1(A) \neq 2$. A n'est pas diagonalisable.

Si $a = 0$, le système est de rang 2,l'ensemble des solutions est un espace de dimension 2.

De la même manière on étudie le rang du système $AX - 2X = 0$.

On obtient successivement $x = y = 0$ puis $fz = 0$.

Si $f \neq 0$, l'ensemble des solutions est donné par $x = y = z = 0$, t quelconque. C'est un espace de dimension 1 avec une valeur propre d'odre 2. A n'est pas diagonalisable.

Si $f = 0$, l'ensemble des solutions sont les vecteurs de coordonnées $(0, 0, z, t)$, espace de dimension 2.

Le seul cas possible de diagonalisation est celui où $a = f = 0$. On a alors deux espaces propres de dimension 2. A est diagonalisable.

En résumé

$$A \quad \text{diagonalisable} \quad \Leftrightarrow a = f = 0$$

4. $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et φ est une application de E dans E qui à tout élément f de E associe la fonction $x \mapsto f'(x) - xf(x)$. Vérifier que φ est un endomorphisme et déterminer les valeurs propres de φ.

Correction :

Soit $f \in E$, la fonction $\varphi(f)$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et donc on a bien un élément de E.

De plus $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall (f, g) \in E^2, \forall x \in \mathbb{R}$:

$\varphi(f + \alpha g)(x) = f'(x) + \alpha g'(x) - xf(x) - \alpha xg(x) = \varphi(f)(x) + \alpha\varphi(g)(x)$

On a bien l'égalité des fonctions $\varphi(f + \alpha g) = \varphi(f) + \alpha\varphi(g)$.

φ est un endomorphisme de E.

Soit alors $\lambda \in \mathbb{R}$. $\varphi(f) = \lambda f \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) - xf(x) = \lambda f(x)$

$\varphi(f) = \lambda f \Leftrightarrow f$ solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $(E) : y' = (x + \lambda)y$

Soit $a : x \mapsto x + \lambda$ Une primitive sur $\mathbb{R}$ de a est $A : x \mapsto x^2/2 + \lambda x$. Les solutions sur $_R$ de l'équation (E) sont les fonctions $x \mapsto ce^{A(x)}$, $c \in \mathbb{R}$.

Tout réel λ est valeur propre de φ et $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $E_\lambda(\varphi) = \text{Vect}\left(x \mapsto e^{\lambda x + x^2/2}\right)$.

5. E est un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ avec $\mathrm{rg}(f) = 1$.
Montrer que f est diagonalisable ssi $\mathrm{tr}(f) \neq 0$.
Montrer que que si $\mathrm{tr}(f) = 0$ alors $f^2 = 0$.

Correction :
Comme $rg(f) = \dim(\mathrm{Im}(f)) = 1$, $\mathrm{Im}(f)$ est une droite vectorielle. Soit a un vecteur directeur de cette droite . $a \neq 0_E$. Notons $a = e_1$ et complétons pour obtenir $(e_1, \dots, e_n)$ base $\mathcal{B}$ de E. $\forall i \in [[1, n]], f(e_i) \in \mathrm{Im}(f)$ donc $\exists \alpha_i \in \mathbb{K} \,/\, f(e_i) = \alpha_i a = \alpha_i e_1$. La matrice de f dans $\mathcal{B}$ s'écrit :
$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$. $\chi_f(\lambda) = \lambda^{n-1}(\lambda - \alpha_1)\,;\, tr(f) = \alpha_1$.
0 est valeur propre de f et $\dim(E_0(f)) = \dim(\ker(f)) = n - \mathrm{rg}(f) = n - 1$.

- Si $\mathrm{tr}(f) \neq 0$, $\alpha_1 \neq 0$ et $\mathrm{sp}(f) = \{0, \alpha_1\}$. La valeur propre α_1 est de multiplicité 1, donc $\dim(E_{\alpha_1}(f)) = 1$. La somme des dimensions des espaces propres de f est $n - 1 + 1 = n = \dim(E)$. f est diagonalisable.
- Si $\mathrm{tr}(f) = 0 = \alpha_1$, f ne possède qu'une seule valeur propre et qu'un seul espace propre $E_0(f) = \ker(f)$ qui est de dimension $n - 1$. f n'est pas diagonalisable.

  Remarquons que dans ce cas $f(a) = f(e_1) = 0_E$. Donc $\forall i \in [[1, n]]$, $f^2(e_i) = f(\alpha_i a) = \alpha_i f(a) = 0_E$. f^2 s'annule sur $\mathcal{B}$ donc $f^2 = 0$.

6. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = A$. Soit φ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui à toute matrice M associe $\varphi(M) = AM + MA$. Déterminer les éléments propres de φ. φ est-il diagonalisable ? Préciser $tr(\varphi)$.

Correction :
Soit f endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A. $f^2 = f$ donc f est un projecteur. Notons $F = \mathrm{Im}(f)$ et $G = \ker(f)$. On a $\mathbb{R}^n = F \oplus G$ et si on note r son rang, la matrice de f dans une base adaptée à la somme directe est $J_r = \begin{pmatrix} I_r & | & (0) \\ - & & - \\ (0) & | & (0) \end{pmatrix}$. J_r et A sont deux matrices semblables et il existe $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = PJ_rP^{-1}$.
Étudions rapidement les deux cas particuliers

- $r = 0$, $J_0 = (0)$, $A = 0$ et φ est l'application nulle.
- $r = n$, $J_n = I_n$, $A = I_n$ et φ est une homothétie de rapport 2.

Dans la suite on suppose que $0 < r < n$.
$r = 0$, $J_0 = (0)$, $A = 0$ et φ est l'application nulle
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\varphi(M) = \lambda M \Leftrightarrow PJ_rP^{-1}M + MPJ_rP^{-1} = \lambda M$$

En multipliant à gauche par P^{-1} et à droite par P on a :

$$\varphi(M) = \lambda M \Leftrightarrow J_r P^{-1} M P + P^{-1} M P J_r = \lambda P^{-1} M P$$

Notons $M' = P^{-1}MP$. On est ramené à trouver les matrices M' telles que

$$(E) :\ J_r M' + M' J_r = \lambda M'.$$

Effectuons un calcul par blocs en notant $M' = \begin{pmatrix} M'_1 & \mid & M'_2 \\ - & & - \\ M'_3 & \mid & M'_4 \end{pmatrix}$ avec
$M'_1 \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$, $M'_2 \in \mathcal{M}_{r,n-r}(\mathbb{R})$, $M'_3 \in \mathcal{M}_{n-r,r}(\mathbb{R})$ et $M'_4 \in \mathcal{M}_{n-r}(\mathbb{R})$.
L'équation matricielle (E) s'écrit :
$\begin{pmatrix} M'_1 & \mid & M'_2 \\ - & & - \\ (0) & \mid & (0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} M'_1 & \mid & (0) \\ - & & - \\ M'_3 & \mid & (0) \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} M'_1 & \mid & M'_2 \\ - & & - \\ M'_3 & \mid & M'_4 \end{pmatrix}$
$(E) \Leftrightarrow 2M'_1 = \lambda M'_1,\ M'_2 = \lambda M'_2,\ M'_3 = \lambda M'_3,\ (0) = \lambda M'_4$
Discutons suivant la valeur de λ :

- $\lambda \notin \{0, 1, 2\}$
  $(E) \Leftrightarrow M'_1 = (0), M'_2 = (0), M'_3 = (0), M'_4 = (0) \Leftrightarrow M' = (0)$
  Comme $M = PM'P^{-1}$, $\varphi(M) = \lambda M \Leftrightarrow M = (0)$. λ n'est pas valeur propre de φ.
- $\lambda = 0$

  $\varphi(M) = (0) \Leftrightarrow M'_1 = 0,\ M'_2 = (0),\ M'_3 = (0) \Leftrightarrow M' = \begin{pmatrix} (0) & \mid & (0) \\ - & & - \\ (0) & \mid & M'_4 \end{pmatrix}$

  $\varphi(M) = (0) \Leftrightarrow M = P \begin{pmatrix} (0) & \mid & (0) \\ - & & - \\ (0) & \mid & M'_4 \end{pmatrix} P^{-1}$ avec $M'_4 \in \mathcal{M}_{n-r}(\mathbb{R})$.

  0 est valeur propre de φ. Comme l'application $M' \mapsto PM'P^{-1}$ est une bijection, l'espace $E_0(\varphi)$ est isomorphe à $\mathcal{M}_{n-r}(\mathbb{R})$ donc de dimension $(n-r)^2$.
- $\lambda = 1$

  $\varphi(M) = M \Leftrightarrow M'_1 = 0,\ M'_4 = (0) \Leftrightarrow M' = \begin{pmatrix} (0) & \mid & M'_2 \\ - & & - \\ M'_3 & \mid & (0) \end{pmatrix}$

  $\varphi(M) = (0) \Leftrightarrow M = P \begin{pmatrix} (0) & \mid & M'_2 \\ - & & - \\ M'_3 & \mid & (0) \end{pmatrix} P^{-1}$ avec $M'_2 \in \mathcal{M}_{r,n-r}(\mathbb{R})$ et
  $M'_3 \in \mathcal{M}_{n-r,r}(\mathbb{R})$.
  1 est valeur propre de φ, l'espace propre associé est de dimension $2r(n-r)$.
- $\lambda = 2$

$$\varphi(M) = M \Leftrightarrow M_1' = 2,\ M_3' = (0),\ M_4' = (0) \Leftrightarrow M' = \begin{pmatrix} M_1' & | & (0) \\ - & & - \\ (0) & | & (0) \end{pmatrix}$$

$$\varphi(M) = (0) \Leftrightarrow M = P \begin{pmatrix} M_1' & | & (0) \\ - & & - \\ (0) & | & (0) \end{pmatrix} P^{-1} \text{ avec } M_1' \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R}) \ .$$

2 est valeur propre de φ, l'espace propre associé est de dimension r^2.

La somme des dimensions des valeurs propres de φ est $r^2+2r(n-r)+(n-r)^2 = (n-r+r)^2 = n^2 = \dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$.

φ est diagonalisable.

Sa trace est donc la somme des valeurs propres comptées avec leur ordre de multiplicité. $\mathrm{tr}(\varphi) = 1 \times 2r(n-r) + 2 \times r^2 = 2rn$