1. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.On définit : $A_* = \bigcup_{p\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\geq p} A_n$ et $A^* = \bigcap_{p\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\geq p} A_n$.

   (a) Vérifier que A_*et A^* sont des événements et que $A_* \subset A^*$

   (b) Montrer les inégalités de Fatou :
   $$P(A_*) \leq \lim_{p\to+\infty} \left(\inf_{n\geq p} P(A_n)\right) \text{ et } \lim_{p\to+\infty} \left(\sup_{n\geq p} P(A_n)\right) \leq P(A^*).$$

   (c) Déterminer un exemple où ces inégalités sont strictes.

Correction :

(a) Notons pour $p \in \mathbb{N}$, $B_p = \bigcap_{n\geq p} A_n$. B_p est une intersection dénombrable d'éléments de la tribu $\mathcal{A}$. C'est donc un élément de $\mathcal{A}$. $A_* = \bigcup_{p\in\mathbb{N}} B_p$ est une réunion dénombrable d'événements, c'est aussi un événement. Même raisonnement pour A^*.

(b) Remarquons que pour tout p de $\mathbb{N}$, $B_p = A_p \left(\bigcap_{n\geq p+1} A_n\right) = A_p \cap B_{p+1}$.

On a donc $B_p \subset B_{p+1}$ et $B_p \subset A_n$ si $n \geq p$.

A_* est une union croissante d'événements et donc $P(A_*) = \lim_{p\to+\infty} P(B_p)$.

Notons pour tout entier k $y_k = P(B_k)$ et $x_k = P(A_k)$. D'après les inclusions précédentes, la suite (y_k) est croissante et minorée par 1. On retrouve qu'elle converge (et sa limite est $P(A_*)$).

La suite (x_n) est seulement bornée : $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in [0, 1]$.

De plus $\forall p \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq p$, on a $y_p \leq x_n$. y_p est un minorant de l'ensemble $\{x_n, n \geq p\}$. On a donc $y_p \leq \inf_{n\geq p} x_n$.

Notons $w_p = \inf\{x_n, n \geq p\} = \inf_{n\geq p} x_n$.

Soit p fixé. $\{x_n, n \geq p\} \subset \{x_n, n \geq p + 1\}$.

Par définition, $\forall n \geq p$, $w_p \leq x_n$. Donc w_p est un minorant de $\{x_n, n \geq p + 1\}$ et, par définition de la borne inférieure, $w_p \leq w_{p+1}$.

La suite $(w_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée. Elle converge. On a vu que pour tout p, $y_p \leq w_p$. Par passage à la limite :

$P(A_*) \leq \lim_{p\to+\infty} \left(\inf_{n\geq p} P(A_n)\right)$.

(c) Étude similaire en notant $C_p = \bigcup_{n\geq p} A_n$. On obtient une suite décroissante d'événements et $P(A^*) = P\left(\bigcap_{p\in\mathbb{N}} C_p\right) = \lim_{p\to+\infty} P(C_p)$

Notons pour tout $p \in \mathbb{N}$ $z_p = P(C_p)$. La suite (z_p) est décroissante de limite $P(A^*)$.

Pour tout $n \geq p$, $A_n \subset C_p$ donc $x_n \leq z_p$ et z_p est un majorant de $\{x_n, n \geq p\}$. On a donc $z_p \geq \sup\limits_{n \geq p} x_n$.

Notons enfin $w'_p = \sup\limits_{n \geq p} x_n$. Tout réel qui majore $\{x_n, n \geq p\}$ majore $\{x_n, n \geq p+1\}$ et w'_p est donc aussi un majorant de $\{x_n, n \geq p+1\}$. Par définition de la borne supérieure (le plus petit des majorants),
$w_p \geq \sup_{n \geq p+1} x_n = w'_{p+1}$. La suite (w'_p) est décroissante. Elle est minorée par 0, elle converge.

Pour tout p, $z_p \geq w'_p$ donc par passage à la limite $\lim\limits_{p \to +\infty} z_p \geq \lim\limits_{p \to +\infty} w'_p$.

On a donc bien :
$$\lim_{p \to +\infty} \left(\sup_{n \geq p} P(A_n) \right) \leq P(A^*)$$

(d) Considérons une suite infinie de tirages d'une pièce équilibrée et notons A_n l'événement le résultat du $n^{\text{ème}}$ tirage est Face.
$\forall n \in \mathbb{N}, P(A_n) = x_n = 1/2$. Avec les notations des questions précédentes on a donc $\forall p \in \mathbb{N}$, $w_p = \inf\limits_{n \geq p} x_n = 1/2$ et $w'_p = \sup\limits_{n \geq p} x_n = 1/2$. Ces deux suites sont convergentes de limite $1/2$.

Mais $P\left(\bigcap\limits_{n=p}^{N} A_n\right) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{N-p+1}$. On a pour p fixé, une suite décroissante d'événements d'intersection B_p. $P(B_p) = \lim\limits_{N \to +\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^{N-p+1} = 0$.

On a donc $P(A_*) = 0 < 1/2$.

De même C_p est une réunion croissante d'événements $\bigcup\limits_{n=p}^{N} A_n$ avec
$$P\left(\bigcup_{n=p}^{N} A_n\right) = 1 - P\left(\overline{\bigcup_{n=p}^{N} A_n}\right) = 1 - P\left(\bigcap_{n=p}^{N} \overline{A_n}\right) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{N-p+1}$$

$z_p = P(C_p) = \lim\limits_{N \to +\infty} 1 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^{N-p+1} = 1$ et par par passage à la limite $P(A^*) = 1 > 1/2$.

2. Un plongeur de restaurant lave 30 verres. Les verres sont de trois formes différentes, désignées par A,B et C. Il y a 10 verres de chaque forme. Au cours de la vaisselle deux verres sont cassés.

(a) Quelle est la probabilité que les deux verres cassés soient de la même forme ?

(b) Quelle est la probabilité de casser au moins un verre de type A ?

(c) Quelle est la probabilité de casser un verre de type A et un verre de type B ?

(d) Soit X la variable aléatoire comptant le nombre de verres cassés de type A. Loi de X ? Espérance et variance ?

Correction :

$\Omega = \{$tous les choix de deux verres parmi 30$\}$. $\text{card}(\Omega) = \binom{30}{2} = 435$.

(a) $E_1 = \{$deux de même type cassés$\}$. $\text{card}(E_1) = 3\binom{100}{2} = 135$.

$P(E_1) = \dfrac{135}{435} = \dfrac{9}{29}$

(b) $E_2 = \{$on casse au moins un verre de type A$\}$.

$P(\overline{E_2}) = \dfrac{\binom{20}{2}}{435} = \dfrac{190}{435} = \dfrac{38}{87}$. $P(E_2) = \dfrac{49}{87}$.

(c) $E_3 = \{$on casse un verre de type A et un verre de type B$\}$. 10 choix possibles pour le premier, 10 pour le second mais pas d'ordre dans le choix du couple. Au total 100 possibles et $P(E_3) = \dfrac{100}{435} = \dfrac{20}{87}$.

(d) X peut prendre 3 valeurs 0,1,2.

$P(X=0) = \dfrac{\binom{20}{2}}{435} = \dfrac{38}{87}$. $P(X=1) = \dfrac{10 \times \binom{20}{1}}{435} = \dfrac{200}{435} = \dfrac{40}{87}$

$P(X=2) = \dfrac{\binom{10}{2}}{435} = \dfrac{45}{435} = \dfrac{9}{87}$

$E(X) = \dfrac{40}{87} + 2\dfrac{9}{87} = \dfrac{58}{87}$. $E(X^2) = \dfrac{40}{87} + 2^2\dfrac{9}{87} = \dfrac{76}{87}$

$V(X) = \dfrac{76}{87} - \left(\dfrac{58}{87}\right)^2 = \dfrac{112}{261}$

3. Dans la savane, un lion chasse des gazelles et des zèbres. La population de gazelles et de zèbres est suffisamment importante pour que la population de chaque espèce reste stable malgré la chasse. La probabilité pour que le lion ramène une gazelle est de 2/3 et de 1/3 pour un zèbre. Les repas du lion ne sont composés que d'une proie à chaque fois et indépendants. On observe le lion sur une assez grande période. Pour $n > 2$, on note E_n l'événement « le lion a mangé une gazelle deux fois de suite, pour la première fois, aux $n-1$-ème et n- ème repas », et on note $u_n = P(E_n)$.
Pour $n > 1$, on appelle G_n l'événement « le lion a mangé une gazelle au repas » et Z_n l'événement « le lion a mangé un zèbre au repas ».

(a) Calculer u_2.

(b) Exprimer les événements E_3 et E_4 en fonction d'événements Z_i et G_i.. En déduire u_3 et u_4.

(c) Calculer $P(E_4|Z_1)$ et $P(E_4|G_1 \cap Z_2)$.

(d) Soit $n > 4$. Expliquer pourquoi $P(E_n|Z_1) = u_{n-1}$. Exprimer de même $P(E_n|G_1 \cap Z_2)$ et $P(E_n|G_1 \cap G_2)$.

(e) Montrer que $\forall n > 4$, $u_n = \dfrac{1}{3}u_{n-1} + \dfrac{2}{9}u_{n-2}$.

(f) Donner pour tout $n > 2$ l'expression explicite de u_n en fonction de n.

(g) Quelle est la probabilité qu'il existe deux repas consécutifs constitués de gazelles ?

Correction :

(a) $E_2 = G_1 \cap G_2$ et, par indépendance $u_2 = P(E_2) = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{4}{9}$.

(b) $E_3 = Z_1 \cap G_2 \cap G_3$ et $P(E_3) = \dfrac{4}{27}$
$E_4 = (Z_1 \cap Z_2 \cap G_1 \cap G_2) \cup (G_1 \cap Z_2 \cap G_3 \cap G_4)$, union disjointe et
$u_4 = \dfrac{4}{81} + \dfrac{8}{81} = \dfrac{12}{81}$.

(c) $P(E_4|Z_1) = P(E_4 \cap Z_1)/P(Z_1)$ or $E_4 \cap Z_1 = Z_1 \cap Z_2 \cap G_1 \cap G_2$.
Par suite $P(E_4|Z_1) = \dfrac{4}{81} \times \dfrac{3}{1} = \dfrac{4}{27}$.
$P(E_4|G_1 \cap Z_2) = P(E_4 \cap G_1 \cap Z_2)/P(G_1 \cap Z_2) = P(G_1 \cap Z_2 \cap G_3 \cap G_4)/P(G_1 \cap Z_2) = \dfrac{8}{81} \times \dfrac{9}{2} = \dfrac{4}{9}$.

(d) $E_n|Z_1$ correspond à l'événement "la première fois à partir du rang 2 où le lion mange deux jours de suite une gazelle est n". Cela revient exactement à déterminer la probabilité qu'à partir du jour 1 le lion ait pour la première fois deux gazelles de suite au jour n-1. Donc $P(E_n|Z_1) = P(E_{n-1}) = u_{n-1}$
Si les deux premiers repas sont "gazelle-gazelle" et si $n > 2$, $P(E_n|G_1 \cap G_2) = 0$ car la première fois où le lion mange deux gazelles de suite est rencontrée. De même si on commence par "G-Z" on se retrouve en 3

comme en 1 pour l'étude mais pour une période de temps de $n-2$ jours.
$P(E_n|G_1 \cap Z_2) = P(E_{n-2}) = u_{n-2}$.
Les trois événements forment un système complet d'événements et la formule des probabilités totales donne :
$P(E_n) = P(E_n|Z_1)P(Z_1) + P(E_n|G_1 \cap Z_2)P(Z_1 \cap G_2) + 0$. On a bien :
$u_n = \frac{1}{3}u_{n-1} + \frac{2}{9}u_{n-2}$.

(e) On a une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique $r^2 - (1/3)r - 2/9 = 0$. Deux racines 2/3 et -1/3. Il existe deux réels a, b tels que pour tout n, $u_n = a(2/3)^n + b(-1/3)^n$. Les valeurs initiales donnent :
$\begin{cases} a\frac{4}{9} + b\frac{1}{9} &= \frac{4}{9} \\ a\frac{8}{27} - b\frac{1}{27} &= \frac{4}{27} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a + b &= 4 \\ 8a - b &= 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a &= \frac{2}{3} \\ b &= \frac{4}{3} \end{cases}$.
Donc : $\forall n \geq 2,\ u_n = P(E_n) = \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n + \dfrac{4}{3}\left(\dfrac{-1}{3}\right)^n$

(f) On calcule $S = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} P(E_n) = \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} - 4\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{-1}{3}\right)^{n+1}$.
$S = \dfrac{8}{27}\dfrac{1}{1-\frac{2}{3}} + \dfrac{4}{27}\dfrac{1}{1-\left(\frac{-1}{3}\right)} = \dfrac{8}{9} + \dfrac{1}{9} = 1$.
Le lion, s'il vit longtemps, longtemps, verra presque surement son repas favori deux jours de suite.

4. Soit $n \geq 2$.Une urne contient une boule blanche, une boule noire et $n-2$ boules rouges toutes indiscernables au toucher. On tire successivement et sans remise toutes les boules de l'urne. On note X_1 (resp. X_2) la variable aléatoire égale au rang de la boule noire (resp. la boule blanche).

(a) Déterminer la loi du couple (X_1, X_2).
(b) Déterminer les lois marginales de ce couple.
(c) On note Y le rang du premier tirage où l'on obtient soit la boule blanche, soit la boule noire. ($Y = \min(X_1, X_2)$). De même on note Z le rang du premier tirage à partir duquel on a déjà tiré la boule blanche et la boule noire ($Z = \max(X_1, X_2)$). Préciser la loi de Y et de Z.
(d) Calculer les espérances de Y et Z.

Correction :

(a) Soit Ω l'ensemble des tirages possibles. $\text{card}(\Omega) = n!$.
Soit r et s deux entiers de $[[1, n]]$.
Si $r = s$, $P(X_1 = r, X_2 = s) = 0$ (une boule est unicolore)
Si $r \neq s$: $(X_1 = r, X_2 = s)$ est réalisé par la position fixée des deux boules blanche et noire et par les $(n-2)!$ positions possibles des boules rouges.

$$P(X_1 = r, X_2 = s) = \frac{(n-2)}{n!} = \frac{1}{n(n-1)}$$

(b) On retrouve donc que :

$\forall r \in [[1,n]],\ P(X_1 = r) = \displaystyle\sum_{s=1}^{n} P(X = r, Y = s) = \frac{n-1}{n(n-1)} = \frac{1}{n}.$

Idem pour X_2

(c) Soit $r \in [[1, n-1]]$. Pour réaliser $(Y = r)$, il faut tirer une des deux boules N,B en position r puis placer la deuxième après (donc $n-r$ choix) et enfin placer les $(n-2)$ boules rouges. Il y a donc $2 \times (n-r) \times (n-2)!$ tirages distincts qui réalisent cet événement.

$P(Y = r) = \dfrac{2(n-r)((n-2)!)}{n!} = \dfrac{2(n-r)}{n(n-1)}.$

(d) Soit $s \in [[2, n]]$.

On dénombre les tirages qui réalisent l'événement $(Z = s)$. Comme précédemment :

$P(Z = s) = \dfrac{2(s-1)}{n(n-1)}.$

(e) $E(Y) = \displaystyle\sum_{r=1}^{n-1} r\frac{2(n-r)}{n(n-1)} = \frac{2}{n(n-1)}\left(n\sum_{r=1}^{n-1} r - \sum_{n=1}^{n-1} r^2\right)$

$E(Y) = \dfrac{2}{n(n-1)}\left(\dfrac{n(n-1)n}{2} - \dfrac{(n-1)n(2n-2+1)}{6}\right) = n - \dfrac{2n-1}{3}$

$E(Y) = \dfrac{n+1}{3}.$

De même :

$E(Z) = \dfrac{2}{n(n-1)}\displaystyle\sum_{s=2}^{n} s(s-1) = \frac{2}{n(n-1)}\sum_{s=1}^{n} s(s-1)$

$E(Z) = \dfrac{2}{n(n-1)}\left(\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \dfrac{n(n+1)}{2}\right) = \dfrac{n+1}{3(n-1)}(2n+1-3)$

$E(Z) = \dfrac{2(n+1)}{3}.$

Remarque : X_1 et X_2 suivent des lois uniformes sur $[[1, n]]$ et $E(X_1) = E(X_2) = \dfrac{n+1}{2}$. Comme $Y + Z = X_1 + X_2$, on retrouve bien $E(X_1) + E(X_2) = E(Y) + E(Z) = n + 1.$

5. Soit n un entier fixé de $\mathbb{N}^*$. On note $\mathfrak{S}_n$ l'ensemble des bijections de $[[1, n]]$ dans $[[1, n]]$. Les éléments de $\mathfrak{S}_n$ sont appelés les permutations d'ordre n.
On choisit une permutation au hasard. Quel est le nombre moyen de ses points fixes ?

Correction :

$\text{card}(\mathfrak{S}_n) = n!$. On choisit une permutation σ au hasard. Pour i élément fixé de $[[1, n]]$ on note X_i la variable aléatoire égale à 1 si $\sigma(i) = i$, à 0 sinon.

$P(X_i = 1) = \dfrac{(n-1)!}{n!}$ et $E(X_i) = \dfrac{1}{n}$.

Le nombre de points fixes de σ est $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ et $E(X) = 1$.

Ce nombre moyen de points fixes ne dépend pas de n. On peut modéliser l'expérience et simuler le tirage.

```
def Permut(n):
    L=[]
    for k in range(n):
        L.append(k)
    T=[]
    for k in range(n):
        s=choice(L)
        L.remove(s)
        T.append(s)
    return(T)

def Point_fixe(liste):
    S=0
    for k in range(len(liste)):
        if liste[k]==k:
            S=S+1
    return(S)

def Essai(n,N):
    T=0
    for k in range(N):
        T=T+Point_fixe(Permut(n))
    return(T/N)
```

6. On lance n dés équilibrés. On note X le nombre de numéros distincts qui apparaissent lors de cette expérience. Pour tout $i \in [[1, 6]]$, on note X_i la variable de Bernoulli qui vaut 1 si le numéro i est sorti.

   (a) Déterminer la loi des variables X_i.

   (b) Déterminer l'espérance de X.

   (c) Soit $(i, j) \in [[1, 6]]^2$. Déterminer $Cov(X_i, X_j)$. Les variables X_i et X_j sont-elles indépendantes ?

   (d) Calculer $V(X)$.

Correction :

(a) Le cardinal du nombre de tirages possibles est 6^n. Le cardinal des tirages où i n'apparait pas est 5^n.

Par suite $P(X_i = 0) = \left(\frac{5}{6}\right)^n$. $E(X_i) = 1 \times P(X_i = 1) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$.
Si X est une variable de Bernoulli de paramètre p. $V(X) = p(1-p)$.
$V(X_i) = E(X_i^2) - E(X_i)^2 = \left(\frac{5}{6}\right)^n \left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n\right)$

(b) $X = \sum_{i=1}^{6} X_i$. Ces variables sont toutes de même loi.
$E(X) = 6\left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n\right)$.

(c) Prenons $i \neq j$.

- Pour réaliser $(X_i = 0, X_j = 0)$ il faut qu'aucune des deux couleurs n'apparaisse.
$P(X_i = 0, X_i = 0) = \left(\frac{4}{5}\right)^n$
- On a $(X_i = 0) = (X_i = 0, X_j = 0) \cup (X_i = 0, X_j = 1)$ avec deux événements incompatibles. Donc :
$P(X_i = 0, X_j = 1) = \left(\frac{5}{6}\right)^n - \left(\frac{4}{5}\right)^n$.
- De même : $P(X_i = 1, X_j = 0) = \left(\frac{5}{6}\right)^n - \left(\frac{4}{5}\right)^n$
- L'événement $(X_j = 1, Y_j) = 1$ est l'événement contraire de la réunion des trois précédents et
$P(X_i = 1, X_j = 1) = 1 - 2\left(\left(\frac{5}{6}\right)^n - \left(\frac{4}{5}\right)^n\right) - \left(\frac{4}{5}\right)^n$
$P(X_i = 1, X_j = 1) = 1 - 2\left(\frac{5}{6}\right)^n + \left(\frac{4}{5}\right)^n$

Les valeurs prises par X_iX_j sont 1 ou 0.

$E(X_iX_j) = 1 \times P(X_i = 1, X_j = 1) = 1 - 2\left(\frac{5}{6}\right)^n + \left(\frac{4}{5}\right)^n$
$cov(X_iX_j) = E(X_iX_j) - E(X_i)E(X_j)$
$cov(X_iX_j) = 1 - 2\left(\frac{5}{6}\right)^n + \left(\frac{4}{5}\right)^n - \left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n\right)^2$
$cov(X_i, X_j) = \left(\frac{4}{5}\right)^n - \left(\frac{5}{6}\right)^{2n} \neq 0$.
Les variables ne sont pas indépendantes.