<u>Exercice I</u> : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & a \end{pmatrix}$.

1.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -4 \\ 1 & 2 & a+2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & a-6 \end{vmatrix} = 6 - a$$

A est inversible ssi $a \neq 6$.

2. $a \neq 6$. $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$. On utilise les formules de Cramer.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} \alpha & 0 & -2 \\ \beta & -1 & 0 \\ \gamma & 2 & a \end{vmatrix}}{6-a} = \frac{\begin{vmatrix} \alpha & 0 & -2 \\ \beta & -1 & 0 \\ \gamma+2\beta & 0 & a \end{vmatrix}}{6-a} = \frac{-\begin{vmatrix} \alpha & -2 \\ \gamma+2\beta & a \end{vmatrix}}{6-a} = \frac{-a\alpha - 4\beta - 2\gamma}{6-a}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \alpha & -2 \\ -2 & \beta & 0 \\ 1 & \gamma & a \end{vmatrix}}{6-a} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \alpha & -2 \\ 0 & \beta+2\alpha & -4 \\ 0 & \gamma-\alpha & a+2 \end{vmatrix}}{6-a} = \frac{\begin{vmatrix} \beta+2\alpha & -4 \\ \gamma-\alpha & a+2 \end{vmatrix}}{6-a} = \frac{2a\alpha + (a+2)\beta + 4\gamma}{6-a}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ -2 & -1 & \beta \\ 1 & 2 & \gamma \end{vmatrix}}{6-a} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & -1 & \beta+2\alpha \\ 0 & 2 & \gamma-\alpha \end{vmatrix}}{6-a} = \frac{\begin{vmatrix} -1 & \beta+2\alpha \\ 2 & \gamma-\alpha \end{vmatrix}}{6-a} = \frac{-3\alpha - 2\beta - \gamma}{6-a}$$

Comme $X = A^{-1}B$ on a :

$$A^{-1} = \frac{1}{6-a} \begin{pmatrix} -a & -4 & -2 \\ 2a & a+2 & 4 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

3. $a = 3$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ base de E et f de matrice A dans $\mathcal{B}$.
   (a) Soit $\varepsilon_1 = -2e_1 + e_2 + 2e_3$. On a $[f(\varepsilon_1)]_{\mathcal{B}} = A \times [\varepsilon_1]_{\mathcal{B}}$.
   On obtient : $[f(\varepsilon_1)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = 3[\varepsilon_1]_{\mathcal{B}}$. D'où : $f(\varepsilon_1) = 3\varepsilon_1$.
   (b) $\varepsilon_2 = e_1$ et $\varepsilon_3 = -2e_2 + e_3$.

$$[f(\varepsilon_2)]_{\mathcal{B}} = A \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{donc } f(\varepsilon_2) = e_1 - 2e_2 + e_3 = \varepsilon_2 + \varepsilon_3$$

$$[f(\varepsilon_3)]_{\mathcal{B}} = A \times \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{donc } f(\varepsilon_2) = -2e_1 + 2e_2 - e_3 = -2\varepsilon_2 - \varepsilon_3$$

(c) La matrice de $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ dans $\mathcal{B}$ est $P = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$\det(P) = -5$. $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est donc une base de E. D'après la question précédente la matrice de f dans cette base est $A' = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

(d) Par calcul simple :

$$A'^2 = \begin{pmatrix} 3^2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad A'^3 = \begin{pmatrix} 3^3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad A'^4 = \begin{pmatrix} 3^4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On obtient facilement l'expression générale de $A'p$ suivant le reste de la division euclidienne de p par 4. Pour n entier on a :

$$A'^{4n} = \begin{pmatrix} 3^{4n} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A'^{4n+1} = \begin{pmatrix} 3^{4n+1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad A'^{4n+2} = \begin{pmatrix} 3^{4n+2} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A'^{4n+3} = \begin{pmatrix} 3^{4n+3} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(e) Soit $p \in \mathbb{N}$. On a :
$A' = P^{-1}AP$ donc $A'^p = P^{-1}AP \times P^{-1}AP \times ... \times P^{-1}AP = P^{-1}A^pP$.
Et donc $A^p = PA'^pP^{-1}$. En particulier :

$$A^{4n} = P \begin{pmatrix} 3^{4n} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$$

Tous calculs faits...

$$A^{4n} = \begin{bmatrix} 1 & -2/5\,3^{4\,r} + 2/5 & -4/5\,3^{4\,r} + 4/5 \\ 0 & 1/5\,3^{4\,r} + 4/5 & 2/5\,3^{4\,r} - 2/5 \\ 0 & 2/5\,3^{4\,r} - 2/5 & 4/5\,3^{4\,r} + 1/5 \end{bmatrix}$$

4. $(a = 3)$.

(a) Par calcul simple : $A'^3 - 3A'^2 + A' - 3I_3 = (0)$.
$A^3 - 3A^2 + A - 3I_3 = P(A'^3 - 3A'^2 + A' - 3I_3)P^{-1} = (0)$.

(b) Soit $P_0(X) = X^3 - 3X^2 + X - 3X^2(X-3) + X - 3$. 3 est racine évidente de P_0. $P_0(X) = (X-3)(X^2+1)$. Trois racines $3, i, -i$.

(c) $X^n = P_0(X)Q(X) + a_nX^2 + b_nX + c_n$. On évalue cette relation en $3, i, -i$. On obtient le système :

$$\begin{cases} 9a_n & +3b_n & +c_n & = 3^n \\ -a_n & +ib_n & +c_n & = i^n \\ -a_n & -ib_n & +c_n & = (-i)^n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_n & +ib_n & -c_n & = -(-i)^n \\ & 2ib_n & & = i^n - (-i)^n \\ & (3-9i)b_n & +10c_n & = 3^n + 9(-i)^n \end{cases}$$

$$b_n = \frac{i^n - (-i)^n}{2i} \qquad c_n = \frac{3^n + 9(-i)^n - (3-9i)\frac{i^n-(-i)^n}{2i}}{10}$$

$$c_n = \frac{(3^n + 9(-i)^n)(2i) - (3-9i)(i^n - (-i)^n)}{20i} \qquad a_n = -(-i)^n - ib_n + c_n$$

(d) On a donc $A^n = Q(A)P_0(A) + a_nA^2 + b_nA + c_nI_3 = a_nA^2 + b_nA + c_nI_3$.

Exercice II

On considère deux suites $(a_n)n \in \mathbb{N}^*$ et $(b_n)n \in \mathbb{N}^*$ d'éléments de $\mathbb{C}$ telles que, pour tout i , tout j , $a_i + b_j \neq 0$. On suppose de plus les b_j tous distincts.
Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$ on note M_N la matrice carrée d'ordre N d'élément général $m_{i,j} = \dfrac{1}{a_i + b_j}$, $1 \leq i \leq N$ et $1 \leq j \leq N$. On note $D_N = \det(M_N)$ et

$$F(X) = \frac{(X-a_1)...(X-a_{N-1})}{(X+b_1)...(X+b_N)} = \sum_{i=1}^{N} \frac{c_i}{X+b_i}$$

.

1. Pour i fixé on multiplie $F(X)$ par $X + b_i$ et on évalue les deux membres de l'égalité en $X = -b_i$. On obtient :

$$c_i = \frac{\prod_{k=1}^{N-1}(b_i - a_k)}{\prod_{1\leq k\leq N, k\neq i}(-b_i + b_k)}$$

2. On remplace la dernière colonne de D, C_N par $C_N - \displaystyle\sum_{k=1}^{N-1} c_kC_k$.

   Le coefficient de la ligne i et de la colonne N devient
   $F(a_i) - \displaystyle\sum_{k=1}^{N-1} \frac{c_k}{a_i + b_k} = \frac{c_N}{a_i + b_N}$. D'où :

$$D = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & .. & \frac{1}{a_1+b_{N-1}} & F(a_1) \\ .. & .. & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. \\ \frac{1}{a_N+b_1} & .. & \frac{1}{a_N+b_{N-1}} & F(a_N) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & .. & \frac{1}{a_1+b_{N-1}} & \frac{c_N}{a_1+b_N} \\ .. & .. & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. \\ \frac{1}{a_N+b_1} & .. & \frac{1}{a_N+b_{N-1}} & \frac{c_N}{a_N+b_N} \end{vmatrix} = c_ND_N$$

3. Par construction $F(a_1) = ... = F(a_{N-1}) = 0$. Par développement par rapport à la dernière colonne :
   $D = F(a_N)D_{N-1}$. D'où la relation de récurrence : $D_N = \dfrac{F(a_N)}{c_N}D_{N-1}$.
4. Par récurrence, à partir de la valeur pour $N = 1$ on obtient :

$$D_N = \frac{\prod_{1\leq i<j\leq N}(a_j - a_i)\prod_{1\leq i<j\leq N}(b_j - b_i)}{\prod_{(i,j)\in\{1,...,N\}^2}(a_i + b_j)}$$

Problème

On appelle matrice **semi-magique** d'ordre n, une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle qu'il existe un réel, noté $\sigma(M)$ vérifiant

$$\forall i \in \{1,..,n\} \sum_{j=1}^{n} m_{i,j} = \sigma(M) \quad \text{et} \quad \forall j \in \{1,..,n\} \sum_{i=1}^{n} m_{i,j} = \sigma(M)$$

On note K_n l'ensemble $K_n = \{(i,j) \in \{1,...,n\}^2 / \, i+j = n+1\}$.
On appelle matrice **magique** d'ordre n une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ayant les propriétés suivantes :
M est semi-magique et $\sigma(M) = tr(M) = \sum_{i=1}^{n} m_{i,i}$ et $\sigma(M) = \sum_{(i,j)\in K_n} m_{i,j}$.

1. L'élément d'indice j de MV est $\sum_{i=1}^{n} m_{i,j} \times 1$ celui d'indice j de ${}^tMV$ est $\sum_{j=1}^{n} m_{i,j}$.
   La condition est nécessaire : si M est semi-magique, alors $M.V = \sigma(M)\ V$ et ${}^tM.V = \sigma(M)V$ (Valeur propre $\sigma(M)$.)
   Réciproquement : Si V est vecteur propre de M et ${}^tM$ alors $\lambda = \sigma(M)$ et M est semi-magique.
2. (a) SM_n et MG_n ne sont pas vides car ils contiennent la matrice nulle.
   Si V est vecteur propre de deux matrices M_1 et M_2, V est vecteur propre de toute combinaison linéaire de ces matrices.
   Donc SM_n est un sous espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$
   (b) Id est semi-magique(évident) et même magique.
   Pour le produit : $M_1.M_2.V = M_1(\sigma(M_2)V) = \Big(\sigma(M_1)\sigma(M_2)\Big)\ V$ prouve la stabilité de SM_n
   (c) Les deux conditions supplémentaires sont conservéees par combinaison linéaire MG_n est un espace vectoriel.
3. E est magique avec $\sigma(E) = n$
   $E^2 \ = \ n\,E$ et par récurrence : si $p \geq 1 \qquad E^p \ = \ n^{p-1}E$
4. On effectue le produit en remarquant que M est semi-magique, on a :
   $EM = ME = \sigma(M)E$.
5. Dans cette question on impose $n = 3$.
   (a) La décomposition d'une matrice de $M_3(\mathbb{R})$ en une matrice symatrique S et une matrice antisymétrique A existe et est unique.
   Il suffit de vérifier que si M est magique, S et A sont aussi magiques :
   $M \ = S \ + A \qquad \sigma(S) \ = \sigma(M)\,;\, \sigma(A) \ = \ 0$
   détail du calcul :

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & \frac{b+d}{2} & \frac{c+g}{2} \\ \frac{b+d}{2} & e & \frac{f+h}{2} \\ \frac{c+g}{2} & \frac{f+h}{2} & k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{b-d}{2} & \frac{c-g}{2} \\ \frac{d-b}{2} & 0 & \frac{f-h}{2} \\ \frac{g-c}{2} & \frac{h-f}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Avec :
$\sigma(S) = a + e + k = \sigma(M) = a + \frac{b+d}{2} + \frac{c+g}{2} = \frac{1}{2}\Big((a+b+c) + (a+d+g)\Big)$
$\sigma(A) = 0 = \frac{b-d}{2} + \frac{c-g}{2} = \frac{1}{2}\Big((a+b+c) - (a+d+g)\Big)$

(b) La résolution du système donne :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & -\alpha \\ -\alpha & 0 & \alpha \\ \alpha & -\alpha & 0 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \alpha A_0)$$

(c) De même les matrices magiques symétriques de trace nulle sont :

$$S = \begin{pmatrix} \beta & -\beta & 0 \\ -\beta & 0 & \beta \\ 0 & \beta & -\beta \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \beta S_0$$

$M_0 = M - \dfrac{1}{3} tr(M)\, E$ est magique de trace nulle ($\sigma(M_0 = 0)$ car MG_3 est un sous espace vectoriel.
Si M est symétrique M_0 est aussi symétrique de trace nulle, donc :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & -\alpha \\ -\alpha & 0 & \alpha \\ \alpha & -\alpha & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta & -\beta & 0 \\ -\beta & 0 & \beta \\ 0 & \beta & -\beta \end{pmatrix} + \frac{1}{3} tr(M) E$$

MG_3 est donc de dimension 3 rapporté à la base : $(A_0\ ,\ S_0\ ,\ E)$, et :

$$M = \begin{pmatrix} \beta+\gamma & \alpha-\beta\gamma & -\alpha+\gamma \\ -\alpha-\beta+\gamma & \gamma & \alpha+\beta+\gamma \\ \alpha-\gamma & -\alpha+\beta+\gamma & -\beta+\gamma \end{pmatrix}$$

6. On se propose de démontrer que si M est une matrice magique de de MG_3, alors, pour tout entier p impair, M^p est magique.

   (a) Soit M matrice magique de MG_3 de trace nulle.
   On admet qu'il existe un un polynôme du troisième degré P,
   $P(X) = X^3 + aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_3[X]$ tel que
   $P(M) = M^3 + aM^2 + bM + cId = (0)$ avec $a = -tr(M)$.

   $P(M) = M^3 + a\, M^2 + b\, M + cId = 0$ et ici : $a = 0$.
   Si $c \neq 0$ on obtient s'écrit : $\dfrac{-1}{c} M\,(M^2 + b\, Id) = Id$ donc M est inversible et : $M^{-1} = \dfrac{-1}{c}\,(M^2 + b\, Id)$
   Le résultat de la question 4 donne : $EM = ME = 0$.
   Mais comme M est inversible on a alors $EMM^{-1} = 0 = E$ ce qui n'est pas. D'où $c = 0$.

La relation polynômiale s'écrit $M^3 + bM = (0)$. En prenant $\lambda = -b$, $M^3 = \lambda M$. On obtient $M^4 = \lambda M^2$, $M^5 = \lambda M^3 = \lambda^2 M$

Par une récurrence immédiate :

$$\forall p \in \mathbb{N},\ M^{2p+1} = \lambda^p M$$

Comme l'ensemble des matrices magiques est un sev, pour tout entier n impair, M^n est magique.

(b) Soit M une matrice magique de MG_3. On note $M_0 = M - \frac{1}{3}tr(M)E$. M_0 est donc magique de trace nulle.

D'après 4 elle commute avec E, on peut utiliser la formule du binôme.

$$M^p \ = \ M_0^p \ + \sum_{k=1}^{p} \binom{p}{k} \left(\frac{1}{3}tr(M)\right)^k M_0^{p-k} E^k$$

$$\text{Or} \ : \ \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} \left(\frac{1}{3}tr(M)\right)^k \sigma(M_0)^{p-k} E \ = \ 0$$

$$M^p \ = \ M_0^p \ + \ \left(\frac{1}{3}tr(M)\right)^p 3^{p-1}\, E$$

$$M^p \ = \ M_0^p \ + \ \frac{1}{3}\left(tr(M)\right)^p E$$

Si p est impair M_0^p est une matrice magique donc M est aussi magique comme combinaison linéaire de matrices magiques.

7. Dans cette question on impose $n = 4$ et on considère la matrice magique d'ordre 4 de MG_4

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) $A^2 \ = \ A \ + \ 2\,I$ et A est une matrice magique..

(b)

$$a_0 \ = \ 0 \qquad b_0 \ = \ 1 \qquad \text{et} \qquad a_1 \ = \ 1 \qquad b_1 \ = \ 0$$

Par récurrence : si $A^p \ = \ a_p A \ + \ b_p B$ alors :
$A^{p+1} \ = \ a_p A^2 \ + \ b_p A \ = \ (a_p + b_p)A \ + \ 2\,a_p I$

$a_{p+1} = a_p + b_p\,; \quad b_{p+1} = 2\,a_p$.

(c) Pour $p \geq\ 2$ par récurrence les coefficients sont strictement positifs .

Donc pour $p \geq 2$, si A^p était magique I serait aussi par combinaison linéaire une matrice magique, ce qui est faux.

Si $\quad p \geq 2 \quad A^p$ n'est pas une matrice magique.