1. **Algèbre linéaire** : exercice 10
$E$ est un K-ev de dimension finie et $f \in L(E)$ Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :
$(i)$ : $f^2 = O$ et
$(ii)$ : $\exists (g,h) \in (L(E))^2 / g \circ h = f \quad \text{et} \quad h \circ g = O$

**Correction** :

(a) Supposons qu'il existe deux endomorphismes de $E$ , $g$ et $h$, tels que $g \circ h = f$ et $h \circ g = O$. On a alors :
$f \circ f = (g \circ h) \circ (g \circ h) = g \circ (h \circ g) \circ h = g \circ O \circ h = O$

(b) Réciproquement si $f^2 = O$ alors, pour tout $x \in E$, $f(f(x)) = \overrightarrow{0_E}$ et donc $Im(f) \subset \ker(f)$. Soit donc $H_1$ un supplémentaire de $Im(f)$ dans $\ker(f)$ et $H$ un supplémentaire de $\ker(f)$ dans $E$ de telle sorte que :
$\ker(f) = Im(f) \oplus H_1$ et $E = \ker(f) \oplus H$ donc $E = Im(f) \oplus H_1 \oplus H$.
$H_1 \oplus H$ est un supplémentaire de $Im(f)$ dans $E$.
Soit $p$ le projecteur d'image $Im(f)$ et de noyau $H \oplus H_1$.
Pour tout $x \in E$, $f(x) \in Im(f) = Im(p)$. Or $p$ est un projecteur et donc $Im(p)$ est l'ensemble des vecteurs invariants par $p$.
D'où : $\forall x \in E$, $p(f(x)) = f(x)$ ; c.a.d. $p \circ f = f$.
Mais : $\forall x \in E$, $p(x) \in Im(p) = Im(f) \subset \ker(f)$.
Donc $\forall x \in E$, $f(p(x)) = \overrightarrow{0_E}$. On a $f \circ p = O$.
Les deux endomorphismes $g = p$ et $h = f$ conviennent.

2. **Algèbre linéaire** : exercice 16
$E$ est un espace vectoriel de dimension $n$, $F, G$ deux sev de $E$. On note $\Phi$ l'application qui à tout $u \in \mathcal{L}(E)$ associe $(u/_F, u/_G)$ dans $\mathcal{L}(F,E) \times \mathcal{L}(G,E)$. A quelle condition l'application $\Phi$ est-elle surjective ?

**Correction** :

(a) Supposons que $\Phi$ soit surjective.
Soit $h_1 \in \mathcal{L}(F,E)$ qui à tout $x$ de $F$ associe $h_1(x) = 2x$.
Soit $h_2 \in \mathcal{L}(G,E)$ qui à tout $x$ de $G$ associe $h_2(x) = 3x$.
Par hypothèse il existe $u \in \mathcal{L}(E)$ telle que $\Phi(u) = (h_1, h_2)$.
Donc : $\forall x \in F$, $u(x) = h_1(x) = 2x$ et $\forall x \in G$, $u(x) = h_2(x) = 3x$.
$\forall x \in F \cap G$, $u(x) = 2x = 3x$. Donc $\forall x \in F \cap G$, $x = \overrightarrow{0_E}$.
$F$ et $G$ sont donc en somme directe.

(b) Réciproquement supposons $F$ et $G$ en somme directe et notons $S = F \oplus G$. Soit alors $H$ un supplémentaire de $S$ dans $E$ de telle sorte que $E = S \oplus H = F \oplus G \oplus H$.
Soit $h_1 \in \mathcal{L}(F,E)$ et $h_2 \in \mathcal{L}(G,E)$. Le théorème de factorisation nous permet d'affirmer qu'il existe un unique élément $\tilde{u} \in \mathcal{L}(S,E)$ tel que $\tilde{u}/_F = h_1$ et $\tilde{u}/_G = h_2$.
Soit alors $h_3$ un élément quelconque de $\mathcal{L}(H,E)$. Le théorème de factorisation appliqué à la somme directe $S \oplus H$ permet d'affirmer l'existence

d'un unique $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u/_S = \tilde{u}$ et $u/_H = h_2$.
Par construction $u/_F = h_1$ et $u/_G = h_2$. Donc $\Phi(u) = (h_1, h_2)$.
$\Phi$ est surjective.

Remarque : on montre que $\Phi$ est bijective si et seulement si $F$ et $G$ sont deux sous-espaces supplémentaires de $E$.

3. **Algèbre linéaire** : exercice 17
Soit $E = \mathbb{R}[X]$ et $L$ qui à tout $P$ de $E$ associe $L(P) = P(X+1)+P(X-1)-2P(X)$. Montrer que $L$ est linéaire et non injective. Déterminer le degré de $L(P)$ quand $\deg(P) = n > 1$. En déduire le noyau de $L$. Montrer que $L$ est surjective.

**Correction** :

(a) $\forall (P, Q) \in E^2$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ :
$L(P + \alpha Q) = (P + \alpha Q)(X + 1) + (P + \alpha Q)(X - 1) - 2(P + \alpha Q)(X)$
$L(P + \alpha Q) = P(X + 1) + P(X - 1) - 2P(X) + \alpha(Q(X + 1) + Q(X - 1) - 2Q(X))$
$L(P + \alpha Q) = L(P) + \alpha L(Q)$. $L$ est linéaire.

(b) Soit $P = aX + b$ un polynôme quelconque de degré au plus 1.
$L(P) = a(X + 1) + b + a(X - 1) + b - 2(aX + b) = 0$.
$P \in \ker(L)$ et $\mathbb{R}_1[X] \subset \ker(L)$. $L$ n'est pas injective.

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n > 1$.
$L(X^n) = (X + 1)^n + (X - 1)^n - 2X^n$
$= X^n + nX^{n-1} + n(n-1)/2X^{n-2} + X^n - nX^{n-1} + n(n-1)/2X^{n-2} - 2X^n + R(X)$ avec $\deg(R) < n - 2$.
$L(X^n) = n(n-1)X^{n-2} + R(X)$ et $\deg(L(X^n)) = n - 2$.
Soit alors $P$ un polynôme de degré $n$.
$P = a_nX^n + Q$ avec $a_n \neq 0$ et $\deg(Q) \leq n - 1$. $L(Q)$ est un polynôme de degré au maximum $n - 3$ et $L(a_nX^n)$ est un polynôme de degré $n - 2$.
$L(P)$ est donc un polynôme de degré $n - 2$.

(d) En particulier si $\deg(P) > 1$, $L(P)$ n'est pas le polynôme nul. $\ker(L)$ est donc exactement composé des polynômes de degré au plus 1.
$\ker L = \mathbb{R}_1[X]$.

(e) Soit $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$. La restriction de $L$ à $\mathbb{R}_p[X]$, notée $\tilde{L}$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_p[X]$ de noyau $\mathbb{R}_1[X]$. Le noyau est de dimension 2 donc $Im(\tilde{L})$ est de dimension $(p + 1) - 2$. Mais $Im(\tilde{L}) \subset \mathbb{R}_{p-2}[X]$, espace de dimension $p - 1$. Donc $Im(\tilde{L}) = \mathbb{R}_{p-2}[X]$.
Soit $Q$ un polynôme quelconque de $\mathbb{R}[X]$.
Soit $p$ un entier tel que $p - 2 \geq \deg(Q)$. $Q \in \mathbb{R}_{p-2}[X]$.
Il existe $Q_1 \in \mathbb{R}_p[X]$ tel que $\tilde{L}(Q_1) = Q$. On a donc $L(Q_1) = Q$.
Tout élément de $\mathbb{R}[X]$ possède un antécédent par $L$. $L$ est surjective.

4. **Matrices :** exercice 6

$a_1, ..., a_n$ sont des réels non nuls et $A = \begin{pmatrix} 0 & & a_n \\ & / & \\ a_1 & & 0 \end{pmatrix}$.

Montrer que $A$ est inversible et déterminer $A^{-1}$.

**Correction** : Soit $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ de matrice $A$ dans la base canonique $(e_1, ..., e_n)$. On a : $f(e_1) = a_1 e_n$, $f(e_2) = a_2 e_{n-1}, ..., f(e_n) = a_n e_1$.
Comme les $a_i$ sont tous non nuls , $Im(f) = Vect(e_n, e_{n-1}, ..., e_1) = \mathbb{R}^n$.
$f$ est surjective donc bijective. $A$ est inversible.
On obtient facilement : $f^{-1}(e_n) = \dfrac{1}{a_1} e_1, f^{-1}(e_{n-1}) = \dfrac{1}{a_2} e_2, ..., f^{-1}(e_1) = \dfrac{1}{a_n} e_n$.
$A^{-1}$ est la matrice de $f^{-1}$ dans la base $(e_1, ..., e_n)$ donc :
$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & & \frac{1}{a_1} \\ & / & \\ \frac{1}{a_n} & & 0 \end{pmatrix}$.

5. **Matrices :** exercice 9

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On note $B$ telle que $A = I_3 + B$.

Calculer, pour tout $p$ de $\mathbb{N}$, $B^p$ et $A^p$. Calculer $A^p$ pour $p \in \mathbb{Z}$.

**Correction** :
$B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B^3 = (0)$.
Comme $I_3$ et $B$ commutent on a, pour tout $p$ de $\mathbb{N}$ :
$A^p = (I_3 + B)^p = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} B^k I_3^{p-k} = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} B^k = I_3 + pB + p(p-1)/2B^2$.
$A^p = \begin{pmatrix} 1 & 2p & 3p + 2p(p-1) \\ 0 & 1 & 2p \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2p & 2p^2 + p \\ 0 & 1 & 2p \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Pour $p$ élément de $\mathbb{N}$ notons $Z(p)$ la matrice $Z(p) = \begin{pmatrix} 1 & -2p & p^2 - p \\ 0 & 1 & -2p \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
On vérifie par le calcul que $A^p \, Z(p) = Z(p) \, A^p = I_3$. La matrice $Z(p)$ est l'inverse de $A^p$. C'est $(A^p)^{-1}$ notée $A^{-p}$ égale aussi à $(A^{-1})^p$. on retrouve la même expression que pour $A^p$ et donc, $\forall n \in \mathbb{Z}$ :

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n & n^2 + n \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6. **Matrices :** exercice 10
$A$ et $B$ sont deux matrices fixées de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Résoudre dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ les équations :
$X + {}^tX = tr(X)A.$ $\qquad X = tr(X)A + B.$

**Correction** :

(a) Étudions la première équation.
Toute matrice $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ se décompose de manière unique comme la somme d'une matrice symétrique $X_1$ et d'une matrice antisymétrique $X_2$ avec $X_1 = \dfrac{X + {}^tX}{2}$ et $X_2 = \dfrac{X - {}^tX}{2}$.
$X = X_1 + X_2$ avec ${}^tX_1 = X_1$, ${}^tX_2 = -X_2$ et donc $X + {}^tX = 2X_1$.
Comme $X_2$ est antisymétrique ses éléments diagonaux sont tous nuls et $tr(X_2) = 0$ donc $tr(X) = tr(X_1)$.
$A$ se décompose de la même manière sous la forme $A = A_1 + A_2$, $A_1$ symétrique, $A_2$ antisymétrique.
D'où $X + {}^tX = tr(X)A \Leftrightarrow 2X_1 = tr(X_1)(A_1 + A_2)$.
Vu l'unicité de la décomposition :
$X$ solution ssi $2X_1 = tr(X_1)A_1$ et $(0) = tr(X_1)A_2$.
Les solutions éventuelles sont donc de la forme $X = \lambda A_1 + X_2$, $X_2$ matrice antisymétrique.

i. Soit alors $X = \lambda A_1 + X_2$, $X_2$ matrice antisymétrique.
$X + {}^tX = 2\lambda A_1$ et $tr(X) = \lambda tr(A_1)$.
$X$ solution ssi $2\lambda A_1 = \lambda tr(A_1)(A_1 + A_2)$
$X$ solution ssi $\lambda = 0$ ou $2A_1 = tr(A_1)(A_1 + A_2)$
La seconde égalité est réalisée ssi $tr(A_1) = 2$ et $A_2 = (0)$.

ii. En résumé, si $A$ est une matrice symétrique de trace 2 alors les solutions sont les matrices de la forme $X = \lambda A + X_2$, $\lambda \in \mathbb{C}$,
$X_2$ matrice antisymétrique quelconque.
Si $A$ n'est pas de ce type, l'ensemble des solutions est l'ensemble des matrices antisymétriques.

(b) Étude de la deuxième équation $X = tr(X)A + B$

i. Les solutions éventuelles sont du type $X = \lambda A + B$.

ii. Soit donc $\lambda \in \mathbb{C}$ et $X = \lambda A + B$ ; $tr(X) = \lambda tr(A) + tr(B)$.
$X$ solution ssi $\lambda A + B = (\lambda tr(A) + tr(B))A + B$.
$X$ solution ssi $(\lambda - \lambda tr(A) - tr(B))A = (0)$.
D'où la discussion :
- Si $A = (0)$, une seule solution $X = B$.
- Si $A \neq (0)$ et $tr(A) \neq 1$, une seule solution $X = \dfrac{tr(B)}{1 - tr(A)}A + B$.
- Si $A \neq (0)$ et $tr(A) = 1$ alors deux cas :
  $\star$ si $tr(B) \neq 0$, pas de solution.
  $\star$ si $tr(B) = 0$ toutes les matrices de la forme $\lambda A + B$ sont solutions.

7. **Matrices :** exercice 13
$A$ est une matrice de $\mathcal{M}_n(K)$ qui vérifie : $A^3 = 6A^2 - 11A + 6I_n$.
Pour $p$ élément de $\mathbb{N}$, calculer $A^p$ en fonction de $I_n, A$ et $A^2$.
$A$ est-elle inversible ? Calculer de même $A^{-1}$ et $A^p$ , $p$ élément de $\mathbb{Z}$ .

**Correction** : Considérons le polynôme $X^3 - 6X^2 + 11X - 6$. $P$ possède trois racines distinctes $1, 2, 3$ et $P = (X - 1)(X - 2)(X - 3)$. Soit alors $p \in \mathbb{N}$. Le reste de la division euclidienne de $X^p$ par $P$ est un polynôme $R_p$ de degré au plus 2 de la forme $R_p = a_p + b_pX + c_pX^2$.
On peut donc écrire : $X^p = P(X)Q(X) + a_p + b_pX + c_pX^2 \quad (1)$
et donc $A^p = P(A)Q(A) + a_pI_n + b_pA + c_pA^2$.
Comme $P(A) = (0)$, $A^p = a_pI_n + b_pA + c_pA^2$.
Il reste à déterminer ces trois coefficients $a_p, b_p, c_p$.
En évaluant la relation (1) en $1, 2, 3$, les trois racines de $P$ on a :
$1^p = 1 = a_p + b_p + c_p$ ; $2^p = a_p + 2b_p + 4c_p$ ; $3^p = a_p + 3b_p + 9c_p$.
On obtient un système linéaire de trois équations à trois inconnues ; le déterminant de ce système est un déterminant de Vandermonde égal à
$(3 - 2)(3 - 1)(2 - 1) = 2 \neq 0$. On obtient une solution unique :
$a_p = 3 - 3\,2^p + 3^p$ ; $b_p = -\dfrac{5}{2} + 4\,2^p - \dfrac{3}{2}3^p$ ; $c_p = \dfrac{1}{2} - 2^p + \dfrac{1}{2}3^p$.
D'où l'expression de $A^p$ pour $p \in \mathbb{N}$.

On remarque que $A(A^2 - 6A + 11I_n) = 6I_n$. Ceci montre que
$\det(A)\det(A^2 - 6A + 11I_n) = 6^n \neq 0$. $\det(A) \neq 0$ donc $A$ est inversible.
Soit $p \in \mathbb{N}$ et cherchons trois éléments de $\mathbb{C}$ , $\alpha_p, \beta_p, \gamma_p$ tels que le polynôme $1 - X^P(\alpha_p + \beta_pX + \gamma_pX^2)$ s'annule en 1,2 et 3.
Le système qui permet de calculer ces coefficients est exactement le même que celui étudié pour calculer le reste de la division euclidienne mais en remplaçant les seconds membres par $1^{-p}$, $2^{-p}$ et $3^{-p}$.
On obtient donc :
$\alpha_p = 3 - 3\,2^{-p} + 3^{-p}$ ; $\beta_p = -\dfrac{5}{2} + 4\,2^{-p} - \dfrac{3}{2}3^{-p}$ ; $\gamma_p = \dfrac{1}{2} - 2^{-p} + \dfrac{1}{2}3^{-p}$.
Ce polynôme est un multiple de $P$. Il existe $Q_1 \in \mathbb{R}[X]$ tel que :
$1 - X^p(\alpha_p + \beta_pX + \gamma_pX^2) = P(X)Q_1(X)$.
D'où : $I_n - A^p(\alpha_pI_n + \beta_pA + \gamma_pA^2) = P(A)Q_1(A) = (0)$.
L'inverse de $A^p$ est $\alpha_pI_n + \beta_pA + \gamma_pA^2$.

8. **Déterminants :** exercice 7
Soit $b \in \mathbb{R}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & b & 2 \\ b & 1 & b \\ 2 & b & 1 \end{pmatrix}$. Calculer $\det(B)$ et déterminer $B^{-1}$ quand $B$ est inversible.

**Correction** : par des opérations élémentaires sur les colonnes :

$$\begin{vmatrix} 2 & b & 2 \\ b & 1 & b \\ 2 & b & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & 2b & 2 \\ b & 2 & b \\ 2 & 2b & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ b & 2-b^2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = b^2 - 2$$

$B$ est inversible ssi $b^2 \neq 0$.
Effectuons des opérations élémentaires sur les colonnes de $B$ pour obtenir une matrice diagonale et effectuons simultanément les mêmes opérations en partant de la matrice $I_3$..

$$\begin{pmatrix} 2 & b & 2 \\ b & 1 & b \\ 2 & b & 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2b & 2 \\ b & 2 & b \\ 2 & 2b & 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ b & 2-b^2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ b & 2-b^2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -b & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & -b & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On termine par :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ b & 2-b^2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 2(2-b^2) & 0 & 0 \\ b(2-b^2) & 2-b^2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2(2-b^2) & 0 & 0 \\ 0 & 2-b^2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -b & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} b^2-2 & -b & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2(2-b^2) & 0 & 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 2b^2-2 & -b & -1 \\ -2b & 2 & 0 \\ 2(2-b^2) & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On retrouve que $B$ est inversible ssi $b^2 - 2 \neq 0$ et , dans ce cas :

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{b^2-1}{2-b^2} & \frac{-b}{2-b^2} & 1 \\ \frac{-b}{2-b^2} & \frac{2}{2-b^2} & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

9. **Déterminants :** exercice 11
Déterminer tous les $x$ réels qui annulent le déterminant d'ordre $n$ suivant :

$$\begin{vmatrix} x+1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & x+1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \ldots & 1 & x+1 \end{vmatrix}$$

**Correction** :
On ajoute à la première colonne toutes les autres colonnes. Puis on retranche la première ligne à toutes les lignes. On obtient :

$$\Delta = \begin{vmatrix} x+1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & x+1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & x+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+n & 1 & \cdots & 1 \\ x+n & x+1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ x+n & \dots & 1 & x+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+n & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & x \end{vmatrix}$$

D'où $\Delta == (x+n)x^{n-1}$ et ses racines.

10. **Déterminants :** exercice 12
Soit $n \in \mathbb{N}$, $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $f$ l'endomorphisme de $E$ qui à tout polynôme $P(X)$ de $E$ associe la polynôme $f(P) = P(X+1)$. Déterminer la matrice $A$ de $f$ dans la base canonique de $E$. Calculer $A^{-1}$.
Soit $a \in \mathbb{Z}$. On note :

$$\Delta_n(a) = \frac{1}{(n+1)!} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a+1 \\ 1 & 2 & 0 & & \vdots & (a+1)^2 \\ 1 & 3 & 3 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & .. & & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & .. & & & C_n^{n-1} & \vdots \\ 1 & C_{n+1}^1 & C_{n+1}^2 & & C_{n+1}^{n-1} & (a+1)^{n+1} \end{vmatrix}$$

Calculer $\Delta_n(a) - \Delta_n(a-1)$. En déduire une expression de $\Delta_n(a)$ sous forme d'une somme dans la cas où $a \in \mathbb{N}^*$. Retrouver ainsi l'expression de $\displaystyle\sum_{k=1}^{N} k^3$.

**Correction** :
De manière évidente : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & \dots & n \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \dots & \binom{n}{2} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \binom{j-1}{i-1} & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & & 0 & 1 \end{pmatrix}$. L'application réciproque de $f$, notée $g$, est celle qui à tout polynôme $P$ associe le polynôme $g(P) = P(X-1)$. Sa matrice dans la base canonique est $A^{-1}$.

Comme $(X-1)^p = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} (-1)^{p-k} X^k$ ;

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & \dots & \dots & (-1)^n \\ 0 & 1 & -2 & \dots & \dots & (-1)^{n-1}n \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \dots & (-1)^{n-2}\binom{n}{2} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & (-1)^{i-j}\binom{j-1}{i-1} & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Notons $C_1, ..., C_{n+1}$ les colonnes de la matrice qui définissent le déterminant $\Delta_n(a)$. On ne change pas le déterminant si on retranche à $C_{n+1}$ la combinaison linéaire $C_1 + aC_2 + a^2C_3 + ... + a^nC_{n-1}$. Les coefficients de la nouvelle colonne sont $a, a^2, a^3, ..., a^n, a^{n+1} + na^n$. Scindons alors cette colonne en deux colonnes d'éléments $a, a^2, ..., a^{n+1}$ et $0, 0, .., (n+1)a^n$. Par linéarité par rapport à la dernière colonne on trouve :

$$\Delta_n(a) = \Delta_n(a-1) + \frac{1}{(n+1)!} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & & \vdots & 0 \\ 1 & 3 & 3 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & .. & & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & .. & & & C_n^{n-1} & \vdots \\ 1 & C_{n+1}^1 & C_{n+1}^2 & & C_{n+1}^{n-1} & (n+1)a^n \end{vmatrix}$$

Le deuxième déterminant se calcule directement (matrice triangulaire inférieure) et :

$$\Delta_n(a) - \Delta_n(a-1) = a^n$$

Soit $a \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{k=0}^{a} (\Delta_n(k) - \Delta_n(k-1)) = \sum_{k=0}^{a} k^n = \Delta_n(a) - \Delta_n(-1) = \Delta_n(a).$$

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall a \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{a} k^n = \Delta_n(a)$$

Prenons par exemple $n = 3$.

$$\sum_{k=0}^{a} k^3 = \Delta_3(a) = \frac{1}{4!} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & a+1 \\ 1 & 2 & 0 & (a+1)^2 \\ 1 & 3 & 3 & (a+1)^3 \\ 1 & 4 & 6 & (a+1)^4 \end{vmatrix} = \frac{(a+1)}{24} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & a+1 \\ 1 & 3 & 3 & (a+1)^2 \\ 1 & 4 & 6 & (a+1)^3 \end{vmatrix}$$

$$\Delta(a)=\frac{(a+1)}{24}\begin{vmatrix}1&0&0&0\\1&2&0&a\\1&3&3&(a+1)^2-1\\1&4&6&(a+1)^3-1\end{vmatrix}=\frac{a(a+1)}{24}\begin{vmatrix}2&0&1\\3&3&a+2\\4&6&a^2+3a+3\end{vmatrix}$$

Le dernier déterminant est égal à $6a^2+6a$. On retrouve :

$$\sum_{k=0}^{a}k^3=\frac{a^2(a+1)^2}{4}$$

11. **Déterminants :** exercice 14
$n\in\mathbb{N}^*$, $\omega=e^{\frac{2i\pi}{n}}$. $M=(m_{i,j})\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ avec, pour $x$ et $y$ entiers quelconques de $[1,n]$, $m_{x,y}=\omega^{(x-1)(y-1)}$. Déterminer $M^2$ et $\det(M^2)$.

**Correction** :
Le coefficient général de $M^2$ est

$$c_{x,y}=\sum_{k=1}^{n}m_{x,k}m_{k,y}=\sum_{k=1}^{n}\omega^{(x-1)(k-1)}\omega^{(k-1)(y-1)}=\sum_{k=1}^{n}\omega^{(x+y-1)(k-1)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\omega^{x+y-2}\right)^{k-1}$$

$x+y-2$ est un entier compris entre 0 et $2n-2$.
$(\omega^{x+y-2})^n=\omega^{(x+y-2)n}=(\omega^n)^{x+y-2}=1$.
On obtient encore une racine $n$-ème de l'unité.
Si $\omega^{x+y-2}\neq 1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(\omega^{x+y-2})^{k-1}=\sum_{k'=0}^{n-1}(\omega^{x+y-2})^{k'}=\frac{1-(\omega^{x+y-2})^n}{1-\omega^{x+y-2}}=0$.
Si $\omega^{x+y-2}=1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(\omega^{x+y-2})^{k-1}=n$.
Les coefficients de la matrice $M^2$ sont tous nuls sauf ceux d'indices $x,y$ tels que $x+y-2$ soit un multiple de $n$. (ici égal à 0 ou $n$).

$$M^2=\begin{pmatrix}n&0&\dots&\dots&0\\0&0&&&n\\0&&&n&0\\&&/&&\\0&n&&&0\end{pmatrix}$$

.
En développant successivement par rapport aux colonnes :
$\det(M^2)=n^n(-1)^n(-1)^{n-1}..(-1)^2=n^n(-1)^{\sum_{k=1}^n k-1}=n^n(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}-1}$

12. **Déterminants :** exercice 15

$n$ est un entier fixé de $\mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}^*$. Calculer :

$$\begin{vmatrix} \binom{n+1}{1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \binom{n+2}{2} & \binom{n+2}{1} & 1 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ \binom{n+p}{p} & \binom{n+p}{p-1} & \binom{n+p}{p-2} & \dots & \binom{n+p}{1} \end{vmatrix}$$

**Correction** :

Pour calculer le déterminant retranchons chaque ligne de la suivante. On a :

$$\Delta(n,p) = \begin{vmatrix} \binom{n+1}{1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \binom{n+1}{2} & \binom{n+1}{1} & 1 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ \binom{n+p-1}{p} & \binom{n+p-1}{p-1} & \binom{n+p-1}{p-2} & \dots & \binom{n+p-1}{1} \end{vmatrix}$$

Décomposons la première colonne en deux colonnes en remarquant que $\begin{pmatrix} n+1 \\ 1 \end{pmatrix} = n+1 = \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} + 1$ et pour $k \geq 2$, $\begin{pmatrix} n+k-1 \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n+k-1 \\ k \end{pmatrix} + 0$.
En utilisant la linéarité par rapport à la première colonne on a :
$\Delta(n,p) = \Delta(n,p-1) + \Delta(n-1,p)$.

Montrons par récurrence sur $N = n+p$ que $\Delta(n,p) = \begin{pmatrix} n+p \\ p \end{pmatrix}$.

Définissons par convention $\Delta(n,0) = 1 = \begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix}$.

Si $N = 1$ une seule "vraie" possibilité $n = 0; p = 1$ et $\Delta(0,1) = 1$.
Supposons que la propriété soit vraie pour tout couples d'entiers tels que $n + p = N - 1$.
Soit alors $(n,p)$ couple d'entiers tels que $n + p = N$.

(a) Si $p = 0$, $\Delta(N,0) = 1 = \begin{pmatrix} N+0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(b) Si $p > 10$, $\Delta(n,p) = \Delta(n,p-1) + \Delta(n-1,p)$
$\Delta(n,p) = \begin{pmatrix} n+p-1 \\ p-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n+p-1 \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N-1 \\ p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} N-1 \\ p-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N \\ p \end{pmatrix}$

Donc on a bien : $\Delta(n,p = \begin{pmatrix} n+p \\ p \end{pmatrix}$.

13. **Déterminants :** exercice 16

$a_0, ..., a_n, b_0, ..., b_n$ sont $2n+2$ réels fixés. $m_{i,j} = (a_i + b_j)^n$. En faisant apparaître un produit de matrices, calculer $\det(M)$.

**Correction** :
$(a_i+b_j)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_i^k b_j^{n-k}$. D'où le produit matriciel :

$$M = \begin{pmatrix} \binom{n}{0}a_0^0 & \binom{n}{1}a_0^1 & \dots & \binom{n}{n}a_0^n \\ \binom{n}{0}a_1^0 & \binom{n}{1}a_1^1 & \dots & \binom{n}{n}a_1^n \\ & & & \\ \binom{n}{0}a_n^0 & \binom{n}{1}a_n^1 & \dots & \binom{n}{n}a_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0^n & b_1^n & .. & b_n^n \\ b_0^{n-1} & b_1^{n-1} & .. & b_n^{n-1} \\ & & & \\ b_0^0 & b_1^0 & .. & b_n^0 \end{pmatrix}$$

Pour le calcul du déterminant on peut factoriser chaque colonne du premier déterminant par $\binom{n}{k}$ et on obtient deux déterminants de Vandermonde. Attention à l'ordre du premier !

$$\det M = \prod_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \prod_{0 \geq i > j \geq n} (a_j - a_i) \prod_{0 \leq i < j \leq n} (b_j - b_i)$$

14. **Espaces vectoriels normés :** exercice 4
$(E, N_1)$ et $(F, N_2)$ sont deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels normés. Montrer que l'application $N$ définie sur $E \times F$ par : $\forall (x,y) \in E \times F$, $N(x,y) = N_1(x) + N_2(y)$, définit une norme de $E \times F$. Caractériser les suites convergentes de $E \times F$. Montrer que si $A$ et $B$ sont des ouverts (fermés) de $E$, et $F$, alors $A \times B$ est un ouvert (fermé) de $E \times F$.

**Correction** :
On a successivement :

- $\forall (x,y) \in E \times F,\ N(x,y) \geq 0$.
- $\forall (x,y) \in E \times F,\ N(x,y) = 0 \Leftrightarrow N_1(x) = -N_2(y) \Leftrightarrow N_1(x) = N_2(y) = 0$. car ces deux réels sont positifs.
  $N(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = \overrightarrow{0_E}\,\text{et}\, y = \overrightarrow{0_F} \Leftrightarrow (x,y) = \overrightarrow{0_{E\times F}}$.
- $\forall (x,y) \in E \times F,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}$ :
  $N(\lambda(x,y)) = N(\lambda x, \lambda y) = N_1(\lambda x) + N_2(\lambda y) = |\lambda|(N_1(x) + N_2(y))$
  $N(\lambda(x,y)) = |\lambda| N(x,y)$
- $\forall (x,y) \in E \times F, \forall (x',y') \in E \times F$
  $N((x,y) + (x',y')) = N(x+x', y+y') = N_1(x+x') + N_2(y+y')$
  $N((x,y)+(x',y')) \leq N_1(x)+N_1(x')+N_2(y)+N_2(y') = N(x,y)+N(x',y')$

$N$ est une norme.

Soit $U_n = (x_n, y_n)$ une suite d'éléments de $E \times F$ et $L = (a,b) \in E \times F$.
$0 \leq N_1(x_n - a) \leq N_1(x_n - a) + N_2(y_n - b) = N((x_n - a, y_n - b) = N(U_n - L)$.
Même encadrement avec $N_2(y_n - b)$.

$$U_n \to L \Leftrightarrow N(U_n - L) \to 0 \Leftrightarrow N_1(x_n - a) \to 0\,\text{et}\, N_2(y_n - b) \to 0$$

La suite $(U_n)$ converge si et seulement si les deux suites $(x_n)$ et $(y_n)$ convergent.
Si $A$ et $B$ sont des fermés, la caractérisation séquentielle montre que $A \times B$ est

un fermé car une suite convergente $(\mathrm{x}_n, y_n)$ d'éléments de $A \times B$ a sa première suite qui converge dans $A$ et la deuxième dans $B$.
Si $A$ et $B$ sont deux ouverts :

$$C_{E\times F} A \times B = (C_E A \times F) \cup (E_F B)$$

Le complémentaire est fermé comme réunion de deux fermés.
$A \times B$ est ouvert.

15. **Espaces vectoriels normés :** exercice 7
Prouver que si $\alpha$ est un complexe de module strictement supérieur à 1 et $(\overrightarrow{x_n})$ une suite de vecteurs du $\mathbb{C}$-espace vectoriel normé E de dimension finie, on a l'équivalence : $(\overrightarrow{x_n})$ converge $\Leftrightarrow$ $(\overrightarrow{x_n} + \alpha\overrightarrow{x_{n+1}})$ converge.

**Correction** :
Notons $u_n = \overrightarrow{x_n}$. Si cette suite est convergente de limite $L$,
$\lim u_n + \alpha u_{n+1} = (1+\alpha)L$
Réciproquement supposons que la suite de terme général $v_n = u_n + \alpha u_{n+1}$ soit convergente de limite $L'$. Notons alors $L = \dfrac{1}{1+\alpha}L'$.
Pour tout $n$ : $u_n - L + \alpha(u_{n+1} - L) = u_n + \alpha u_{n+1} - (1+\alpha)L = v_n - L'$.
Notons $y_n = u_n - L$.
Par hypothèse $\lim(y_n + \alpha y_{n+1}) = 0$.
Notons $\varepsilon_n = y_n + \alpha y_{n+1}$ ; $\varepsilon_n(-\alpha)^n = y_n(-\alpha)^n - y_{n+1}(-\alpha)^{n+1}$
$\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(-\alpha)^k\varepsilon_k = y_0 - (-\alpha)^n y_n$. (somme télescopique).
$\displaystyle y_n = -\sum_{k=0}^{n-1}(-\alpha)^{k-n}\varepsilon_k + \frac{1}{(-\alpha)^n}y_0.$
Choisissons une norme $||-||$ de $E$.
$\displaystyle ||y_n|| \leq \sum_{k=0}^{n-1}|\alpha|^{k-n}||\varepsilon_k|| + \frac{||y_0||}{|\alpha|^n}$ avec $\displaystyle\lim \frac{||y_0||}{|\alpha|^n} = 0$ car $|\alpha| > 1$.
Reste la première somme . Soit $\varepsilon > 0$ quelconque. Il existe un entier $N_0$ tel que $n \geq N_0 \Rightarrow ||\varepsilon_n|| \leq \varepsilon$. Pour $n > N_0 + 1$ :
$\displaystyle 0 \leq \sum_{k=0}^{n-1}|\alpha|^{k-n}||\varepsilon_k|| \leq \frac{\sum_{k=0}^{N_0-1}|\alpha|^k||\varepsilon_k||}{|\alpha|^n} + \varepsilon\sum_{k=N_0}^{n-1}|\alpha|^{k-n}$
$\displaystyle\sum_{k=N_0}^{n-1}|\alpha|^{k-n} \leq \sum_{k=0}^{n-1}|\alpha|^{k-n} = \frac{1}{|\alpha|^n}\frac{|\alpha|^n-1}{|\alpha|-1} \leq 1$ car
comme $|\alpha| > 1$,$|\alpha|^n - 1 \geq |\alpha| - 1$.
Pour $\varepsilon > 0$ fixé, $\displaystyle\sum_{k=0}^{N_0-1}|\alpha|^k||\varepsilon_k||$ est une constante $A$ fixée et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{A}{|\alpha|^n} = 0$.
Pour ce même $\varepsilon$ il existe $N_1$ tel que $n \geq N_1 \Rightarrow 0 \leq \dfrac{A}{|\alpha|^n} \leq \varepsilon$.

Prenons $N_2 = \max(N_0 + 1, N_1)$. $n \geq N_2 \Rightarrow 0 \leq \sum_{k=0}^{n-1} |\alpha|^{k-n} ||\varepsilon_k|| \leq 2\varepsilon$.
La somme tend vers 0 et, par majoration, $\lim ||y_n|| = 0$.
Comme $y_n = u_n - L = \overrightarrow{x_n} - L$ on a montré que la suite $(\overrightarrow{x_n})_{n\in\mathbb{N}}$ était convergente de limite $L = \dfrac{1}{1+\alpha} L'$.

16. **Espaces vectoriels normés :** exercice 8
$E$ est un evn, $A$ et $B$ deux sous-ensembles de $E$, $A+B = \{a+b/a \in A, b \in B\}$.
Montrer que si $A$ et $B$ sont ouverts, $A+B$ aussi. Montrer que si $A$ et $B$ sont fermés, $A+B$ ne l'est pas nécessairement.

**Correction** : On notera $|| - ||$ la norme de $E$.

(a) Supposons $A$ et $B$ ouverts et soit $z$ un élément quelconque de $A + B$.
Il existe $a \in A$ et $b \in B$ tel que $z = a + b$. Comme $A$ est ouvert , il existe $r > 0$ tel que $\mathcal{B}(a, r) \subset A$. Soit alors $y$ un élément quelconque de $\mathcal{B}(z, r)$.
$||z - y|| < r$ donc $||(a + b) - y|| = ||a - (y - b)|| < r$. Par suite :
$y - b \in \mathcal{B}(a, r) \subset A$. $y - b \in A$ et $y = (y - b) + b \in A + B$.
Tous les éléments de $\mathcal{B}(z, r)$ sont donc éléments de $A + B$.
On a montré que $\forall z \in A + B$, $\exists r > 0$ tel que $\mathcal{B}(z, r) \subset A + B$.
$A + B$ est ouvert.
Remarquons que seul le fait que $A$ est ouvert a été utilisé.

(b) La propriété n'est pas vérifiée en général pour les fermés. Plaçons nous dans $\mathbb{R}$. Définissons deux ensembles par :
$A = \{p + \dfrac{1}{p}/p \in \mathbb{N}, p \geq 2\}$ et $B = \{-q + \dfrac{2}{q}/q \in \mathbb{N}, q \geq 2\}$.
On a : $A = \{\dfrac{5}{2}, \dfrac{10}{3}, \dfrac{17}{4}, \dfrac{26}{5} ....\}$ ensemble défini comme une suite strictement croissante de réels. Le complémentaire de $A$ dans $\mathbb{R}$ est
$\left]-\infty, \dfrac{5}{2}\right[ \cup \left]\dfrac{5}{2}, \dfrac{10}{3}\right[ ...$ ; c'est une réunion d'ensembles ouverts. C'est un ouvert. $A$ est fermé. Même chose pour $B$.
Considérons la suite d'éléments de $A + B$ définie par
$x_p = p + \dfrac{1}{p} - p + \dfrac{2}{p} = \dfrac{1}{p} \to 0$.
0 est élément de l'adhérence de $A + B$. Montrons qu'il n'est pas élément de $A + B$. en effet on aurait sinon $0 = p + \dfrac{1}{p} - q + \dfrac{2}{q}$ avec $p$ et $q$ entiers supérieurs à 2.
On aurait $q - p = \dfrac{1}{p} + \dfrac{2}{q} < 2$. La seule valeur possible est 1.
Mais si $q = p + 1$ , $1 = \dfrac{1}{p} + \dfrac{2}{p+1} \Leftrightarrow p^2 + p = 3p + 1$, équation qui n'a pas de solution dans $\mathbb{N}$.
0 n'est pas élément de $A + B$ ; cet ensemble ne vérifie pas le critère séquentiel des fermés. $A + B$ n'est pas fermé .