Corrigé Centrale PC 2 : Opérateur de différence

I L'opérateur de translation et l'opérateur de différence

I.A - L'opérateur de translation

I.A.1) Soit $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$, un polynôme non nul de $\mathbb{R}_n[X]$, de degré $d = \deg(P)$ (i.e. $a_d \neq 0$).
Alors, $\tau(P)$ est de la forme :

$$P(X+1) = \sum_{k=0}^{d} a_k (X+1)^k = a_d X^d + (d a_d + a_{d-1}) X^{d-1} + \sum_{k=0}^{d-2} b_k X^k$$

Comme $a_d \neq 0$:

$$\boxed{\deg(\tau(P)) = \deg(P) \text{ et } \mathrm{cd}(\tau(P)) = \mathrm{cd}(P)}$$

I.A.2) Notons que $\tau^0(P) = P$.
Et que si $\tau^k(P)(X) = P(X+k)$, alors $\tau^{k+1}(P)(X) = \tau(\tau^k(P))(X) = P((X+k)+1) = P(X+(k+1))$.
Ainsi, par récurrence

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ \tau(P)(X) = P(X+k)}$$

I.A.3) D'après la formule du binôme de Newton (changement de variable $i = h+1$),

$$\forall j \in \mathbb{N}_{n+1},\ \tau(P_j)(X) = (X+1)^{j-1} = \sum_{h=0}^{j-1} \binom{j-1}{h} X^h = \sum_{i=1}^{j} \binom{j-1}{i-1} P_i$$

M est donc triangulaire supérieure et les coefficients de M vérifient donc

$$\boxed{\forall i,j \in [\![1,n]\!],\ (M)_{i,j} = \begin{cases} \binom{j-1}{i-1} & \text{pour} \quad i \leqslant j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$$

I.A.4) La matrice M est triangulaire supérieure, donc ses valeurs propres se trouvent sur la diagonale. Il s'agit des nombres $\binom{j-1}{j-1} = 1$.
Comme M et τ ont les mêmes valeurs propres,

$$\boxed{\mathrm{Sp}(\tau) = \{1\}}$$

Si M était diagonalisable, elle serait alors semblable à la matrice unité, et donc elle serait égale à la matrice unité.
Ainsi,

$$\boxed{M \text{ et } \tau \text{ ne sont pas diagonalisable}}$$

I.A.5) 0 n'étant pas valeur propre de τ,

$$\boxed{\tau \text{ est bijective}}$$

Puis si on considère $\overline{\tau} : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X], P(X) \mapsto P(X-1)$,
on montre qu'il s'agit d'un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. Il vérifie : $\tau \circ \overline{\tau} = \overline{\tau} \circ \tau = \mathrm{id}$:

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ \tau(\overline{\tau}(P))(X) = \overline{\tau}(P)(X+1) = P(X) = \tau(\overline{\tau}(P))(X)$$

Donc

$$\boxed{\tau^{-1}(P)(X) = P(X-1)}$$

Puis, comme pour la question 2), on montre que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\tau^{-k}(P)(X) = P(X-k)$.
Donc la formule est toujours vraie :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{Z},\ \tau(P)(X) = P(X+k)}$$

I.A.6) Avec l'expression de τ^{-1}, on applique la même méthode qu'en 3) et on obtient :

$$\forall j \in \mathbb{N}_{n+1},\ \tau^{-1}(P_j)(X) = (X-1)^{j-1} = \sum_{h=0}^{j-1} \binom{j-1}{h} (-1)^{j-1-h} X^h = \sum_{i=1}^{j} (-1)^{j-i} \binom{j-1}{i-1} P_i$$

Puis

$$\boxed{\forall i,j \in [\![1,n]\!],\ (M^{-1})_{i,j} = \begin{cases} (-1)^{j-i}\binom{j-1}{i-1} & \text{pour} \quad i \leqslant j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$$

I.A.7) La $k+1^{\text{e}}$ ligne du calcul $V = Q \times U$ est justement

$$v_k = \sum_{j=1}^{n+1} Q_{k+1,j} u_{j-1} = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} u_j$$

On peut identifier (après changement d'indice) : $Q_{k,j} = \begin{cases} \binom{k-1}{j-1} & \text{pour} \quad j \leqslant k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

On a donc

$$\boxed{Q = M^T}$$

I.A.8) M est inversible, donc $Q = M^T$ également et $Q^{-1} = (M^T)^{-1} = (M^{-1})^T$.
Puis par équivalence : $V = Q \times U \iff U = Q^{-1} \times V = (M^{-1})^T \times V$.
La $k+1^{\text{e}}$ ligne de ce calcul donne alors

$$u_k = \sum_{j=1}^{n+1} \Big((M^{-1})^T\Big)_{k+1,j} v_{j-1} = \sum_{j=1}^{n+1} \Big((M^{-1})\Big)_{j,k+1} v_{j-1} = \sum_{j=0}^{n} \Big((M^{-1})\Big)_{j+1,k+1} v_j$$

$$\boxed{u_k = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} v_j}$$

I.A.9) On a alors

$$\boxed{v_k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \lambda^j = (\lambda+1)^k}$$

On vérifie bien :

$$\boxed{\sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} v_j = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (\lambda+1)^j (-1)^{k-j} = ((\lambda+1)-1)^k = u_k}$$

I.B - L'opérateur de différence

I.B.1) Avec les mêmes notations qu'en $1.A.1$), avec P *non constant* on a :

$$\delta(P)(X) = a_d X^d + (d a_d + a_{d-1}) X^{d-1} + \sum_{k=0}^{d-2} b_k X^k - a_d X^d - a_{d-1} X^{d-1} - \sum_{k=0}^{d-2} a_k X^k = d a_d X^{d-1} + \sum_{k=0}^{d-2} c_k X^k$$

Comme $a_d \neq 0$:

$$\boxed{\text{si } P\text{, non constant, } \deg(\delta(P)) = \deg(P) - 1 \text{ et } \mathrm{cd}(\delta(P)) = \deg(P) \times \mathrm{cd}(P)}$$

I.B.2) D'après la question précédente, si P n'est pas constant, $\deg(P) \geqslant 1$ et $\deg(\delta(P)) \geqslant 0$, donc $\delta(P)$ n'est pas nul. Ainsi, si $\delta(P) = 0$, alors P est constant.
Réciproquement, si P est constant, le calcul (simple) donne $\delta(P) = 0$.
Donc

$$\boxed{\ker(\delta) = \mathbb{R}_0[X]}$$

La question précédente montre aussi que $\mathrm{Im}(\delta) \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$.
Or d'après le théorème du rang : $\dim(\mathrm{Im}(\delta)) = n+1-\dim(\ker(\delta)) = n = \dim(\mathbb{R}_{n-1}[X])$.
Donc :

$$\boxed{\mathrm{Im}(\delta) = \mathbb{R}_{n-1}[X]}$$

I.B.3) Si $\ker(\delta^j) = \mathbb{R}_{j-1}[X]$, avec $j < n$.

$$P \in \ker(\delta^{j+1}) \Longleftrightarrow \delta^{j+1}(P) = 0 = \delta^j(\delta(P)) \Longleftrightarrow \delta(P) \in \mathbb{R}_{j-1}[X]$$

Donc

$$P \in \ker(\delta^{j+1}) \Longleftrightarrow \deg(P) = \deg(\delta(P)) + 1 \leqslant (j-1)+1 = j \Longleftrightarrow P \in \mathbb{R}_j[X]$$

Ainsi, par récurrence :

$$\boxed{\forall j \in [\![1,n]\!],\ \ker(\delta^j) = \mathbb{R}_{j-1}[X]}$$

Si $P \in \mathrm{Im}(\delta^j)$, alors il existe $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $P = \delta^j(Q)$.
Or une récurrence simple (suite arithmétique) montre que $\deg P = \deg(Q) - j$, donc $\deg(P) \leqslant n-j$.
Par conséquent, $P \in \mathbb{R}_{n-j}[X]$, et donc $\mathrm{Im}(\delta^j) \subset \mathbb{R}_{n-j}[X]$.
Le théorème du rang assure par ailleurs que ces deux espaces ont même dimension, donc :

$$\boxed{\forall j \in [\![1,n]\!],\ \mathrm{Im}(\delta^j) = \mathbb{R}_{n-j}[X]}$$

I.B.4) Notons Δ, la matrice de δ dans la base (P_k).
Par construction de $\delta = \tau - \mathrm{id}$, on a $\Delta = M - I_{n+1}$.
Puis comme M commute avec I_{n+1}, alors d'après la formule de Newton : $\Delta^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j}(-1)^{k-j}M^j$.
Ce qui permet d'affirmer, en revenant aux endomorphismes :

$$\boxed{\forall k \in \mathbf{N},\ \delta^k = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j}\binom{k}{j}\tau^j}$$

I.B.5) Si $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X] = \ker(\delta^n)$, alors $\delta^n(P) = 0$. Donc :

$$0(X) = [\delta^n(P)](X) = [\sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-j}\binom{n}{j}\tau^j(P)](X) = \sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-j}\binom{n}{j}[\tau^j(P)(X)] = \sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-j}\binom{n}{j}P(X+j)$$

il s'agit bien du polynôme nul.
Et en particulier en la valeur réelle $X = 0$:

$$\boxed{\sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-j}\binom{n}{j}P(j) = 0}$$

I.B.6) a) $u \circ \delta^2 = u \circ [u^2 \circ u^2] = u^5 = [u^2 \circ u^2] \circ u = \delta^2 \circ u$.
Donc

$$\boxed{u \text{ et } \delta^2 \text{ commutent}}$$

b) Soit $P \in \mathbb{R}_1[X] = \ker \delta^2$, alors

$$\delta^2(u(P)) = u(\delta^2(P)) = u(0) = 0$$

Donc $u(P) \in \ker(\delta^2) = \mathbb{R}_1[X]$.
Par conséquent

$$\boxed{\mathbb{R}_1[X] \text{ est stable par } u}$$

c) Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ vérifie $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, alors

$$\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{pmatrix} = A \times A^2 = A^3 = A^2 \times A = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc $a = d$ et $c = 0$, ainsi $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$, puis $A^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 2ab \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}$, et ainsi nécessairement $a = 0$, puis $2ab = 0$; ce qui est contradictoire avec $ab = 1$.
Donc

$$\boxed{\text{aucune matrice } A \text{ ne vérifie } A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

d) Puisque $\mathbb{R}_1[X]$ est stable par u, notons $\tilde{u} : \mathbb{R}_1[X] \to \mathbb{R}_1[X], P \mapsto u(P)$.
Considérons alors A, la matrice de $\tilde{u}$ dans la base (P_1, P_2) de $\mathbb{R}_1[X]$.
Alors A^2 est égale à la matrice de δ sur $\mathbf{R}_1[X]$ donc $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Or d'après la question précédente, ceci est impossible. Donc

$$\boxed{\text{Il n'existe pas d'endomorphisme } u \text{ de } \mathbb{R}_n[X] \text{ tel que } u^2 = \delta}$$

I.B.7) a) On a vu (questions *I.B.*3)) que $\deg(\delta^i(P)) = \deg(P) - i = d - i$.
Ainsi, la famille $(P, \delta(P), \dots \delta^d(P))$ est une famille de degré échelonné (de d à 0).

$$\boxed{\text{C'est une famille libre et } \mathrm{vect}(P, \delta(P), \dots \delta^d(P)) = \mathbb{R}_d[X]}$$

b) Soit V stable par δ.
Si $P \in V$, alors $\delta^i(P) \in V$ et donc $\mathbb{R}_{\deg(P)}[X] = \mathrm{vect}(P, \delta(P), \dots \delta^n(P)) \subset V$.
Il reste à montrer l'égalité, il faut prendre le polynôme en degré maximum...
V est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$. Notons $d = \dim(V) - 1$.
Notons $(e_0, \dots e_d)$ une base de V. Nécessairement, l'un des e_i est un polynôme de degré supérieur ou égal à d.
Sinon, on aurait une famille libre de $d+1$ vecteurs de $\mathbb{R}_d[X]$, ce qui est impossible.
Donc il existe P dans V de degré $r \geqslant d$.
Si $\deg P = r > d$, alors d'après la remarque précédente, $\mathbb{R}_r[X] = \mathrm{vect}(P, \delta(P), \dots \delta^r(P)) \subset V$ et V ne peut être de dimension $d+1$. Donc il existe P de degré d dans V et $\mathbb{R}_d[X] \subset V$ et par égalité des dimensions :

$$\boxed{\text{il existe } d \in [\![0, n]\!] \text{ tel que } V = \mathbb{R}_d[X]}$$

II Applications en combinatoire

II.A - Quelques cas particuliers

II.A.1) Si φ est une surjection de E sur F, alors nécessairement $\#F \leqslant \#E$. Donc

$$\boxed{\text{si } n > p, \text{ alors } S(p, n) = 0}$$

II.A.2) Une surjection d'un ensemble de cardinal n sur un ensemble de cardinal n est en fait une bijection. Donc

$$\boxed{S(n,n) = n!}$$

II.A.3) Les surjections de $\mathbb{N}_{n+1}$ sur $[\![1,n]\!]$ sont parfaitement déterminées -et de manière unique- par :

— Le choix de deux éléments de $\mathbb{N}_{n+1}$ qui auront la même image : $\binom{n+1}{2}$ possibilités

— Puis, la distribution des n éléments de l'ensemble d'arrivée, avec les n éléments de l'ensemble de départ (un de ces éléments étant double) : $n!$ possibilités

Le principe de décomposition permet alors d'affirmer que le cardinal recherché est le produit :

$$\boxed{S(n+1,n) = \binom{n+1}{2} n! = \frac{n \times (n+1)!}{2}}$$

II.B - Recherche d'une expression générale

II.B.1) *Le résultat ne fait pas partie du programme. Il faut le démontrer.*

Une application de $E = \mathbb{N}_p$ sur un ensemble $F = [\![1,n]\!]$ est parfaitement définie -et de manière unique- par la donné pour chacun des p élément de E d'un unique élément de F. Donc pour chacun des p éléments de E, il y a n possibilités.

Le principe de décomposition permet alors d'affirmer que le cardinal recherché est le produit :

$$\boxed{\text{le nombre d'applications de } \mathbb{N}_p \text{ sur } [\![1,n]\!] \text{ est donc } n \times n \cdots \times n = n^p}$$

II.B.2) Notons $I_k = \{\varphi : \mathbb{N}_p \to [\![1,n]\!] | \#\varphi(\mathbb{N}_p) = k\}$. Alors, d'après la question précédente :

$$n^p = \sum_{k=1}^{n} \# I_k$$

Il reste à dénombrer I_k. Or les applications φ de I_k sont parfaitement déterminées -et de manière unique- par :

— Le choix de k éléments de $\mathbb{N}_n$ qui forment $\varphi(\mathbb{N}_p)$: $\binom{n}{k}$ possibilités

— Puis, le choix des surjections de $\mathbb{N}_p$ sur l'ensemble $\varphi(\mathbb{N}_p)$ à k éléments : $S(p,k)$ possibilités

Le principe de décomposition permet alors d'affirmer que le cardinal recherché est le produit :

$$\boxed{n^p = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} S(p,k) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} S(p,k)}$$

avec la convention $S(p,0) = 0$.

II.B.3) On applique alors la formule d'inversion trouvée en $I.A.8$), (p constant)

$$v_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u_k \iff u_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} v_k$$

avec $v_n = n^p$, $u_k = S(p,k)$, donc

$$\boxed{\forall p \geqslant n,\ S(p,n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^p}$$

II.B.4) Pour $p < n$, le polynôme $P = X^p$ appartient à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, donc d'après $I.B.5$),

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^p = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} P(k) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^p = 0 = S(p,n)$$

On peut donc généraliser, de manière cohŕente, la formule obtenue à la question précédente :

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N},\ S(p,n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^p}$$

II.C) Avec les questions précédentes :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^n = S(n,n) = n! \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^{n+1} = S(n+1,n) = \frac{n \times (n+1)!}{2}}$$

III Etude d'une famille de polynômes

III.A - Généralités

III.A.1) Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $\deg(H_k) = k$.
Donc la famille $(H_0, H_1, \dots H_n)$ est une famille de degrés échelonnés, donc elle est libre.
Elle est constituée de $n+1 = \dim(\mathbb{R}_n[X])$ éléments de $\mathbb{R}_n[X]$. Donc

$$\boxed{(H_0, H_1, \dots H_n) \text{ est une base de } \mathbb{R}_n[X]}$$

III.A.2) $\delta(H_0) = 1 - 1 = 0$.
Et pour tout $k \in [\![1,n]\!]$,

$$\delta(H_k)(X) = H_k(X+1) - H_k(X) = \frac{1}{k!}\left(\prod_{j=0}^{k-1}(X+1-j) - \prod_{j=0}^{k-1}(X-j)\right) = \frac{1}{k!}\left((X+1)\prod_{j=0}^{k-2}(X-j) - (X-k+1)\prod_{j=0}^{k-2}(X-j)\right)$$

$$\delta(H_k) = \frac{1}{k!}\left(\prod_{j=0}^{k-2}(X-j)\right)((X+1)-(X-k+1)) = \frac{1}{k!}\left(\prod_{j=0}^{k-2}(X-j)\right) \times k = H_{k-1}$$

Bilan :

$$\boxed{\delta(H_0) = 0 \text{ et pour tout } k \in [\![1,n]\!],\ \delta(H_k) = H_{k-1}}$$

III.A.3) Comme $\delta = \tau - \mathrm{id}$, on a alors $\tau(H_0) = \delta(H_0) + H_0 = H_0$ et $\tau(H_k) = \delta(H_k) + H_k = H_k + H_{k-1}$.
Ainsi M' est exactement la matrice de τ dans la base $(H_0, H_1, \dots, H_n)$ de $\mathbb{R}_n$.
Par conséquent,

$$\boxed{M \text{ et } M' \text{ sont semblables (matrice d'un même endomorphisme dans deux bases différentes)}}$$

III.A.4) Pour tout $k, \ell \in [\![0,n]\!]$, on a (*par récurrence pour $\ell \geqslant k$*) :

$$\delta^k(H_\ell) = \delta^{k-1}(H_{\ell-1}) = \begin{cases} H_{\ell-k} & \text{si} \quad \ell \geqslant k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Puis comme $h \neq 0$, $H_h(0) = 0$ et $H_0(0) = 1$.
Par conséquent :

$$\boxed{\delta^k(H_\ell)(0) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \ell = k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$$

III.A.5) Puisque (H_k) est une base de $\mathbb{R}_n[X]$, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$,
il existe $a_0, a_1, \dots a_n \in \mathbb{R}$ tels que $P = \sum_{\ell=0}^{n} a_\ell H_\ell$.
Puis, par linéarité :

$$\delta^k P(0) = \sum_{\ell}^{n} a_\ell \delta^k(H_\ell)(0) = a_k$$

Donc

$$\boxed{\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ P = \sum_{k=0}^{n} \delta^k(P)(0) H_k}$$

III.B - Étude d'un exemple

III.B.1) Notons $T(X) = X^3 + 2X^2 + 5X + 7$.
Il s'agit de calculer $\delta^k(T)(0)$, pour k de 0 à 3. Or

$$T(X) = X^3 + 2X^2 + 5X + 7\,,\ \delta(T)(X) = 3X^2 + 7X + 8\,,\ \delta^2(T)(X) = 6X + 10\,,\ \delta^3(T)(X) = 6$$

On a donc

$$\boxed{T = 6H_3 + 10H_2 + 8H_1 + 7H_0}$$

III.B.2) Puisque $\delta^2(H_k) = H_{k-2}$, alors par linéarité :

$$\boxed{\text{si } P = 6H_5 + 10H_4 + 8H_3 + 7H_2\text{, on a } \delta^2(P) = 6H_3 + 10H_2 + 8H_1 + 7H_0}$$

III.B.3) Considérons (p_n) une solution particulière.
Toute autre solution (u_n) vérifie :

$$\begin{aligned}\forall k \in \mathbb{N},\ (u-p)_{k+2} - 2(u-p)_{k+1} + (u-p)_k &= (u_{k+2} - 2u_{k+1} + u_k) - (p_{k+2} - 2p_{k+1} + p_k)\\ &= (k^3 + 2k^2 + 5k + 7) - (k^3 + 2k^2 + 5k + 7) = 0\end{aligned}$$

Donc la suite $(u-p)_n$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2.
Son équation caractéristique est $r^2 - 2r + 1 = (r-1)^2$,
et il existe $A, B \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = p_n + (A + Bn)1^n$
Reste à trouver une solution paticulière. On a vu que $\delta^2(P)(X) = P(X+2) - 2P(X+1) + P(X)$.
Avec P tel que $\forall k \in \mathbb{N}$, $\delta^2(P)(k) = k^3 + 2k^2 + 5k + 7$ et $p_k = P(k)$, on a une solution particulière.
Enfin, comme pour $k \geqslant h$, $H_h(k) = \frac{1}{h!}k(k-1)\dots(k-(h-1) = \frac{1}{h!} \times \frac{k!}{(k-h)!} = \binom{k}{h}$, et pour $k < h$, $H_k(h) = 0$; on a

$$\boxed{\text{il existe } A, B \in \mathbb{R} \text{ tels que pour tout } k \in \mathbb{N},\ u_k = A + Bk + 6\tbinom{k}{5} + 10\tbinom{k}{4} + 8\tbinom{k}{3} + 7\tbinom{k}{2}}$$

avec convention : $\binom{k}{h} = 0$ *si* $h > k$

III.C - Polynômes à valeurs entières

III.C.1) Le calcul a été fait plus haut pour les nombres entiers naturels.
Si $k < 0$, en notant $p = -k$, on a :

$$H_n(k) = \frac{1}{n!}k(k-1)\dots(k-(n-1)) = \frac{1}{n!}(-p)(-(p+1))\dots(-(p+n-1)) = \frac{1}{n!}(-1)^n\frac{(p+n-1)!}{(p-1)!} = (-1)^n\binom{p+n-1}{n}$$

Finalement

$$\boxed{H_n(k) = \begin{cases} \binom{k}{n} & \text{si} \quad k \geqslant n \\ 0 & \text{si} \quad k \in [\![0, n-1]\!] \\ (-1)^n\binom{n-1-k}{n} & \text{si} \quad k < 0 \end{cases}}$$

III.C.2) Tous les coefficients binomiaux sont entiers (puisqu'il s'agit d'un cardinal d'un ensemble), donc pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $H_n(k) \in \mathbb{Z}$.

$$\boxed{H_n(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}}$$

III.C.3) Pour tout $k \in \mathbb{Z}$,

$$\delta(P)(k) = P(k+1) - P(k)$$

Par soustraction de nombres entiers, il s'agit d'un nombre entier. Donc

$$\boxed{\text{Si } P \text{ est à valeurs entières sur les entiers, alors il en est de même pour } \delta(P)}$$

III.C.4) Si P est à valeurs entières sur les entiers,
alors par récurrence (sur $h \in \mathbb{N}$), pour tout entier $k \in \mathbb{Z}$, $\delta^h(P)(k) \in \mathbb{Z}$;
et donc en particulier $\delta^h(P)(0) \in \mathbb{Z}$, et les coordonnées de P dans la base (H_k) sont des entières.
Réciproquement, si les coordonnées de P dans la base (H_k) sont des entiers,
alors $P = \sum_{i=0}^{d} a_i H_i$, puis $P(k) = \sum_{i=0}^{d} a_i H_i(k) \in \mathbb{Z}$ (combinaison linéaire d'entiers).
Bilan :

$$\boxed{P \text{ est à valeurs entières sur les entiers si et seulement si ses coordonnées dans } (H_k) \text{ sont entières}}$$

III.C.5) Supposons que P, de degré d, est à valeurs entières sur les entiers,
Alors d'après les questions précédentes, il existe $a_0, a_1 \dots a_d \in \mathbb{Z}$ tels que $P = \sum_{i=0}^{d} a_i H_i$.
Et donc

$$d!P = \sum_{i=0}^{d} a_i \times d!H_i = \sum_{i=0}^{d} \left(a_i \times d(d-1)\dots(i+1) \times \prod_{j=0}^{i-1}(X-j) \right)$$

$$\boxed{\text{Il s'agit bien d'un polynôme } d!P \text{ à coefficients entiers.}}$$

Comme le montre le polynôme $P = \frac{1}{2}X^2$, de degré 2 :
on a $2!P$ à coefficients entiers, mais $P(1) = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$.

$$\boxed{\text{La réciproque est donc fausse.}}$$

IV Généralisation de l'opérateur de différence et application

IV.A -

IV.A.1) $x \mapsto x+1$ est $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}_+^*$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.
Par composition, $x \mapsto f(x+1)$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Puis par addition

$$\boxed{\delta \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ de } \mathbb{R}_+^*}$$

Puis pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\delta(f')(x) = f'(x+1) - f'(x) \text{ et } (\delta(f))'(x) = f'(x+1) - f'(x)$$

Donc

$$\boxed{\delta(f') = (\delta(f))'}$$

IV.A.2) Même démonstration qu'en $I.B.4$),

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, (\delta^n(f))(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f(x+k)}$$

IV.A.3) Soit $x > 0$.
Appliquons le théorème des accroissements finis à f, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[x, x+1]$,

$$\exists c \in]x, x+1[\text{ telque } \delta(f)(x) = f(x+1) - f(x) = f'(c) \times (x+1-x) = f'(c)$$

En faisant le changement de variable $y_1 = c - x$,

$$\boxed{\text{pour tout } x > 0, \text{ il existe } y_1 \in]0,1[\text{ tel que } \delta(f)(x) = f(x+y_1)}$$

IV.A.4) Nous allons procéder par récurrence. Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$\mathcal{P}_n$:« $\forall x > 0, \forall f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*), \exists y_n \in]0, n[$ tel que $\sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} f(x+j) = f^{(n)}(x+y_n)$ »
— La réponse de $IV.A.3$) montre que $\mathcal{P}_1$ est vraie.

— Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $\mathcal{P}_n$ est vraie.
Soit $x > 0$, il existe $y_n \in]0, n[$ ($\mathcal{P}_n$ à δf) tel que :

$$\delta^{n+1}(f)(x) = \delta^n(\delta f)(x) = (\delta f)^{(n)}(x + y_n)$$

Puis par commutation de l'opération différence et dérivation :

$$\delta^{n+1}(f)(x) = (\delta f)^{(n)}(x + y_n) = \delta(f^{(n)})(x + y_n) = f^{(n)}(x + y_n + 1) - f^{(n)}(x + y_n)$$

On applique l'égalité des accroissements finis à $f^{(n)}$, il existe $c \in]x + y_n, x + y_n + 1[$ tel que

$$f^{(n)}(x + y_n + 1) - f^{(n)}(x + y_n) = (f^{(n)})'(c) \times \Big((x + y_n + 1) - (x + y_n)\Big) = f^{(n+1)}(c)$$

Enfin, d'après $IV.A.2)$:

$$\delta^{n+1}(f)(x) = \sum_{j=0}^{n+1} (-1)^{n+1-j} \binom{n+1}{j} f(x + j) = f^{(n+1)}(c)$$

En prenant $y_{n+1} = c - x$, alors $y_{n+1} \geqslant x + y_n - x \geqslant y_n \geqslant 0$ et $y_{n+1} \leqslant x + y_n + 1 - x \leqslant y_n + 1 \leqslant n + 1$.
Ainsi, on a donc $\mathcal{P}_{n+1}$ qui est vérifiée.

Par conséquent,

$$\boxed{\forall x > 0, \forall f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*), \forall n \in \mathbb{N}, \exists y_n \in]0, n[\text{ telque } \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} f(x + j) = f^{(n)}(x + y_n)}$$

IV.B -

IV.B.1) Soit $k \in \mathbb{N}^*$.
Il existe $p_1, \dots p_i$, i nombres premiers et $a_1, a_2 \dots a_i \in \mathbb{N}$ tel que $k = \prod_{j=1}^{i} p_j^{a_j}$.
On a alors

$$k^\alpha = \prod_{j=1}^{i} (p_j^{a_j})^\alpha = \prod_{j=1}^{i} (p_j^\alpha)^{a_j}$$

Il s'agit de produit de nombres entiers naturels non nuls, donc

$$\boxed{k^\alpha \text{ est un nombre entier naturel}}$$

IV.B.2) Si $\alpha < 0$, alors

$$2^\alpha = \left(\frac{1}{2}\right)^{-\alpha} < 1$$

Or on a vu que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $k^\alpha \in \mathbb{N}^*$, donc $k^\alpha \geqslant 1$. On a une contradiction,

$$\boxed{\alpha \in \mathbb{R}_+}$$

IV.B.3) Si α est un entier naturel, alors $f_\alpha^{(\alpha)} = \alpha!$ et donc $f_\alpha^{(\alpha+1)} = 0$;
donc l'une au moins des dérivées de f_α s'annule en au moins un réel strictement positif.
Réciproquement, s'il existe $n \in \mathbb{N}$ et $x_0 > 0$ tels que $f_\alpha^{(n)}(x_0) = 0$;
or on sait que pour tout réel x,

$$f_\alpha^{(n)}(x) = \alpha(\alpha - 1)\dots(\alpha - n + 1)x^{\alpha - n}$$

Donc si $f_\alpha^{(n)}(x_0) = 0$, alors comme $x_0 > 0$, on a nécessairement : $\alpha(\alpha - 1)\dots(\alpha - n + 1) = 0$;
et donc il existe $k \in [\![0, n-1]\!]$ tel que $\alpha - k = 0$ donc $\alpha = k \in \mathbb{N}$. Ainsi :

$$\boxed{\alpha \in \mathbb{N} \text{ ssi il existe } n \in \mathbb{N} \text{ et } x_0 > 0 \text{ tels que } f_\alpha^{(n)}(x_0) = 0}$$

IV.C -

IV.C.1) D'après $IV.B.1$), pour tout k entier, $k^\alpha \in \mathbb{N}$,
donc pour tout $j \in [\![0,n]\!]$, $f_\alpha(x+j) \in \mathbb{N}$ puisque x entier.
Puis par stabilité par multiplication et additions d'entiers :

$$\boxed{\sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-j}\binom{n}{j}f_\alpha(x+j) \in \mathbb{N}}$$

IV.C.2) On applique directement la relation ($IV.1.$) :

$$\exists y_n \in]0,n[\text{ tel que } \sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-j}\binom{n}{j}f_\alpha(x+j) = f_\alpha^{(n)}(x+y_n) = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-\lfloor\alpha\rfloor)}{(x+y_n)^{\lfloor\alpha\rfloor+1-\alpha}}$$

Donc comme $y_n \geqslant 0$,

$$0 \leqslant \sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-j}\binom{n}{j}f_\alpha(x+j) \leqslant \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-\lfloor\alpha\rfloor)}{x^{\lfloor\alpha\rfloor+1-\alpha}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

IV.C.3) Comme cette limite pour $x \to +\infty$ est nulle, on peut prendre $\epsilon = \frac{1}{2}$; il existe $A > 0$ tel que pour tout $x \geqslant A$ et entier : $\sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-j}\binom{n}{j}f_\alpha(x+j) \in]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[$.
Or cette somme est entière, donc elle est nécessairement nulle.
Ainsi, pour tout $x \geqslant A$, $\sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-j}\binom{n}{j}f_\alpha(x+j) = 0 = f^{(n)}(x+y_n)$.
Donc, une dérivée de f_α s'annule en au moins un réel strictement positif. D'après $IV.B.3$),

$$\boxed{\alpha \text{ est donc un entier naturel}}$$