Informatique et numérique

Exercice 1 :
À une liste $L = [a_0, \dots, a_{n-1}]$ on associe la matrice $M = (m_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ vérifiant $m_{i,j} = 1$ si $i = j+1$, $m_{i,n} = -a_{i-1}$ et $m_{i,j} = 0$ sinon.
Créer un programme Python **Matrice**(L) qui renvoie la matrice M liée à la liste $L = [a_0, ..., a_{n-1}]$. Calculer le polynôme caractéristique de M si L est une liste aléatoire de 8 entiers de $[1, 10[$ (on pourra utiliser la fonction **poly** du module **numpy**). Que peut-on conjecturer ? Calculer le polynôme caractéristique de M dans le cas général. Montrer que si P est un polynôme de degré strictement inférieur à n, alors $P(M) \neq 0$. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que M soit diagonalisable.

Exercice 2 : Valeurs propres d'une matrice.
Soit n un entier, $n \geq 1$ et a un réel non nul. On considère la matrice carrée d'ordre n à coefficients réels : $A_{n,a} = \begin{pmatrix} 0 & 1/a & 0 & \dots & 0 \\ a & 0 & 1/a & \ddots & \vdots \\ 0 & a & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 1/a \\ 0 & \dots & 0 & a & 0 \end{pmatrix}$

1. Écrire une fonction qui étant donnés un entier $n \geq 1$ et un réel a non nul retourne la matrice $A_{n,a}$.
2. Donner des valeurs approchées décimales des valeurs propres de $A_{n,a}$ pour $3 \leq n \leq 8$ et a élément de l'ensemble $\{-2, -1, 1, 2, 3\}$.
3. Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de polynômes définie par :

$$P_1 = X \quad P_2 = X^2 - 1 \quad \forall n \in \mathbb{N},\, P_{n+2} = XP_{n+1} - P_n$$

   (a) Calculer les coefficients de $P_3, \dots, P_8$.
   (b) Donner des valeurs approchées des racines de $P_3, \dots, P_8$.
   (c) Conjecturer un lien entre P_n et $A_{n,a}$. Le démontrer.
4. Les matrices $A_{n,a}$ sont-elles inversibles ? - diagonalisables ?
5. Donner un segment de $\mathbb{R}$ contenant les valeurs propres de $A_{n,a}$ pour n entier et a réel dans $\mathbb{R}^*$.

Exercice 3 : Matrices à diagonale strictement dominante.
$A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite **à diagonale strictement dominante** si :

$$\text{pour tout entier} \quad i \in [\![1, n]\!], \quad |a_{i,i}| > \sum_{j\in[\![1,n]\!], j\neq i} |a_{i,j}|$$

On démontre qu'une telle matrice est inversible.

1. Écrire une procédure **Test**(A) qui retourne True si la matrice carrée A est à diagonale strictement dominante. Evaluer le coût de cette procédure en fonction de n, taille de la matrice A.

2. Soit A une matrice à diagonale strictement dominante.
   (a) On définit trois matrices D, S, T de F telles que :
      - $D = (d_{i,j})$ avec pour tout i , $d_{i,i} = a_{i,i}$ et $d_{i,j} = 0$ si $i \neq j$.
      - $S = (s_{i,j})$ avec si $i > j$, $s_{i,j} = -a_{i,j}$ et $s_{i,j} = 0$ si $i \leq j$.
      - $T = (s_{i,j})$ avec si $i < j$, $t_{i,j} = -a_{i,j}$ et $t_{i,j} = 0$ si $i \geq j$.

      de telle sorte que $A = D - S - T$. On note $J = D^{-1}(S + T)$

   (b) Écrire un fonction **Jauxilliaire**(A) qui retourne la matrice J définie ci-dessus à partir d'une matrice A à diagonale strictement dominante.

   (c) Soit $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et C la solution de du système $AX = B$. On choisit X_0 un vecteur quelconque de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et on définit la suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ par son premier terme X_0 et la relation : $\forall k \in \mathbb{N}$, $X_{k+1} = JX_k + D^{-1}B$. Écrire une procédure de paramètres A, p, X_0 qui retourne le terme d'indice p de cette suite.

   (d) Écrire une procédure construisant une suite de matrices de limite A^{-1}.

   (e) Tester cette procédure pour préciser une approximation de l'inverse d'une matrice tridiagonale dont tous les éléments diagonaux sont égaux à $\alpha > 1$ et les éléments $a_{i,i+1}$ et $a_{i,i-1}$ tous égaux à $1/2$, les autres étant nuls.

Exercice 4 : Tracé de courbes.
Utiliser les outils de la bibliothèque matplotlib de python pour donner un tracé des courbes de représentation paramétrique :

1. Soit $a > 0, b > 0$, p, q deux entiers strictement positifs et $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2p}]$. Tracer, pour différentes valeurs de ces paramètres , la courbe de représentation paramétrique
$$f(t) = (a\sin(pt), b\cos(qt + \varphi))$$
2. Même exercice avec les courbes
$f : t \mapsto \left(\dfrac{1}{q}\left((q+1)\cos(t) - \cos((q+1)t)\right), \dfrac{1}{q}\left((q+1)\sin(t) - \sin((q+1)t)\right)\right)$,
$t \in \mathbb{R}$ avec q entier $q = 1, 2, 3$ ou 4.
3. $f : t \mapsto \left(\displaystyle\int_0^t \cos(u^2)du, \int_0^t \sin(u^2)du\right)$.

⋆⋆